Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.
On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

$$\text{pour tout } n\geq 1,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$$

et telles, de plus, que l'on ait : $U_0 \geq 0$ et $U_1 \geq 0$.
On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.
Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.
Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ.

Première partie : Généralités

1.
   a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

   b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?

   c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.

   d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.

   e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?
2. Soit X et Y deux réels positifs démontrer

   a) si $0 \leq X \leq Y \leq \dfrac{X^2 + Y^2}{2}$ alors $Y \geq 1$ ou $X = Y = 0$.

   b) si $\dfrac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y$ alors $Y \leq 1$.
3. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ appartenant à S .

   Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n\geq 2$.
4. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante et telle qu'il existe $N\geq 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_{N-1} et à U_N,

   a)Montrer que $U_N \leq U_{N+1} \leq U_{N+2}$.

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante à partir d'un certain rang.

   c)Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

   d) Montrer que $U_{N+1} \geq 1$.

   e) Montrer que la suite tend vers $+\infty$.
5. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante et telle qu'il existe $N\geq 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_{N-1} et à U_N,

   Montrer en s'inspirant de la question précédente que la suite (U_n) est strictement décroissante à partir d'un certain rang de limite nulle.
6. Déterminer les limites des suites $U(\sqrt{2}, 0)$ et $U(2, 0)$.
7. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante, appartenant à S ,qui ne tend ni vers 0 ni vers $+\infty$.

   a) Montrer que $U_0 \neq U_1$.

   b) Montrer que pour $n \geq 2$, U_n est strictement compris entre U_{n-2} et U_{n-1}

   On suppose que $U_0 < U_1$.

   c) Montrer que la suite $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et la suite $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

   d) Etablir que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   On démontre que si l'hypothèse de la question est vérifiée et si $U_0 > U_1$ la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1.(il n'est pas demandé de refaire la démonstration)

   e) Montrer que E_0, E_1, $E_{+\infty}$ sont non vides et que $Q = E_0 \cup E_1 \cup E_\infty$.

8. Etablir, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :
   - II existe un entier $N\geq 0$ tel que $U_N\geq 1$ et $U_{N+1}\geq 1$.
   - La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
   - La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

   On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie la première propriété, tous ses termes sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1 et utiliser :
$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{(U_{n+1} - U_n)^2}{2} + U_n U_{n+1}$$
   On démontre de même, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de S non constante, l'équivalence des propriétés suivantes :
   - II existe un entier $N\geq 0$ tel que U_N et U_{N+1} soient inférieurs au sens large à 1.
   - La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
   - La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers zéro.

Deuxième partie :

1.
   a) Déterminer et représenter l'ensemble C_2 des (x, y) tels que $U_2(x, y) = 1$.
   En déduire l'ensemble des points tels que $U_2(x, y) \leq 1$.
   b) Déterminer une fonction h telle que $U_3(x, y) = 1 \Longleftrightarrow x = h(y)$.
   Etudier rapidement la fonction h et représenter l'ensemble C_3 des (x, y) tels que $U_3(x, y) = 1$.
   c) Etudier la position relative de C_2 et C_3.
   d) Déduire de l'étude de C_2 et C_3 un sous ensemble de Q inclus dans E_0 et un autre inclus dans E_∞ .
2. Soit $M\,(x, y)$ un point de Q distinct de O et D la demi droite d'origine O passant par M.
   a) Soit $k \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $k > 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_n(kx, ky) \geq kU_n(x, y)$.
   On démontre de même :$k < 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_n(kx, ky) \leq kU_n(x, y)$.
   b) Montrer que si M est élément de E_0 le segment OM est dans E_0.
   Que peut-on dire si M est élément de E_∞ , de E_1?
3. Soit D une demi droite d'origine O incluse dans Q.
   Soit $M_0(x_0, y_0) \in D$. On paramètre D sous la forme $t- > M_t = (tx_0, ty_0)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+$
   On note Ω l'ensemble des t tels que $M_t \in E_0$
   a) Montrer que Ω est non vide.
   Montrer que $D\ \cap E_\infty$ est non vide .
   Montrer que D contient au plus un point de E_1.
   b) Montrer que Ω est borné.Justifier que Ω ademet une borne supérieure.
   On note γ la borne supérieure de Ω
   c) Montrer que $[OM_\gamma[$ est inclus dans E_0.
4.
   a) Montrer que, pour tout n, la fonction $(x, y) \mapsto U_n(x, y)$ est continue sur Q .
   b) On suppose (par l'absurde) que la suite $U(\gamma x_0, \gamma y_0)$ tend vers zéro,
   Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U((\gamma + \varepsilon)\, x_0, (\gamma + \varepsilon)\, y_0)$ tende vers zéro (on pourra utiliser pour cela la question I.8).
   Conclure
   c) Montrer de même que, si la suite $U(\gamma x_0, \gamma y_0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U((\gamma - \varepsilon)\, x_0, (\gamma - \varepsilon)\, y_0)$ tende vers $+\infty$ puis en déduire une absurdité.
   En déduire $M_\gamma \in E_1$
   Que peut-on en déduire pour l'intersection de D avec E_0, E_1 et E_∞
5. Il existe un unique réel $a > 0$ tel que $(a, 0) \in E_1$
   Donner une valeur approchée à 10^{-1} par défaut de a .