Le sujet est inspiré d'un sujet de Centrale 1989.Il reprend principalement les 2 premières parties du sujet posé en option TA (actuelle PT) complétées par quelques questions posées en option P (actuel PC) avec quelques adaptations au programme actuel.

# PREMIERE PARTIE

1. **a)** Soit $U_n = a$ une suite constante alors on a par passage à la limite : $a = a^2$ donc $\boxed{a = 0 \text{ ou } a = 1}$.
   Réciproquement, les suites constantes égales à 0 ou 1 sont dans $S$.
   **b)** Si $l$ est une limite finie d'une suite $(U_n)$ de $S$ alors, par passage à la limite dans la relation $(\mathcal{R})$ on obtient $l^2 = l$ .
   Comme tous les termes de la suite $(U_n)$ sont positifs, la seule limite infinie possible est $+\infty$.
   $$\boxed{l = 0\ ,\ l = 1 \text{ ou } l = +\infty}$$
   **c)** Si $U_{N-1} = U_N = U_{N+1} = a$ alors, comme à la question **a.** on a $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$
   - étude pour $n \geq N$ :Par récurrence **double** sur $n \geq N$, on vérifie que $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$
     - vrai si $n = N$
     - si $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(U_{n+1}^2 + U_n^2\right) = a$. Donc $\forall n \geq N\ U_n = a$

   *mais il ne faut pas oublier les* $n \leq N$
   - étude si $n \leq N$.Par récurrence **double** sur $n \leq N$, on vérifie que $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$
     - vrai si $n = N$
     - si $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n-1}^2 = 2U_{n+1} - U_n^2 = 2a - a^2 = a^2$ et comme $U_{n-1} \geq 0$ et $a \geq 0$ :$U_{n-1} = a$

   $$\boxed{\text{Si la suite a trois termes consécutifs égaux alors la suite est constante égale à 0 ou à 1}}$$
   **d)** Si $U_{n-1} = U_n = 1$ alors on a aussi $U_{n+1} = 1$ et on applique la question précédente.
   **e)** Si $U_n = 0$ avec $n \geq 2$ alors $\dfrac{1}{2}\left(U_{n-2}^2 + U_{n-1}^2\right) = 0$ donc $U_n = U_{n-1} = U_{n-2} = 0$, on applique là aussi la question **c.**
2. **a)** On a $Y \geq X \geq 0$ donc $Y^2 \geq X^2$ et donc $Y^2 \geq \dfrac{X^2 + Y^2}{2} \geq Y$ et donc $Y^2 - Y = Y(Y-1) \geq 0$ donc $Y = 0$ ou $Y \geq 1$ .
   Or $0 \leq X \leq Y$ donc si $Y = 0$ alors $X = 0$.
   $$\boxed{\left(0 \leq X \leq Y \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}\right) \Longrightarrow (Y \geq 1 \text{ ou } X = Y = 0)}$$
   **b)** On a maintenant $0 \leq X \leq Y$ donc $X^2 \leq Y^2$ donc $Y^2 \leq \dfrac{X^2 + Y^2}{2} \leq Y$ donc $Y(Y-1) \leq 0$ donc $Y \in [0,1]$
   $$\boxed{\left(\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y\right) \Longrightarrow (Y \leq 1\ )}$$
   remarque : $\dfrac{X^2 + Y^2}{2} \leq X$ suffit : $\dfrac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \Longrightarrow X^2 + Y^2 - 2X \leq 0 \Longrightarrow (X-1)^2 + (Y^2 - 1) \leq 0 \Longrightarrow Y^2 - 1 \leq 0 \Longrightarrow Y \leq 1$
   la forme choisie par le sujet est plus adaptée à la suite du problème.
3. On a pour tout $n \geq 2$ : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right) - \left(U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2\right)\right) = \dfrac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-2}^2) = \dfrac{1}{2}(U_n - U_{n-2})\,(U_n + U_{n-2})$
   .
   Si $(U_n + U_{n-2}) > 0$ les deux autres quantités sont de même signe.
   Si $(U_n + U_{n-2}) = 0$ alors $U_n = 0$ avec$n \geq 2$ donc $(1.e)$ la suite est nulle et le résultat reste valable.
   $$\boxed{sgn\,(U_{n+1} - U_n) = sgn\,(U_n - U_{n-2})}.$$
4. **a)** Supposons que $U_{N+1} \geq U_N$ et $U_{N+1} \geq U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que :
   $$\operatorname{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \operatorname{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$$
   et donc $\boxed{U_{N+2} \geq U_{N+1} \geq U_N}$.
   **b)** Par récurrence double on a alors
   $$\forall p \geq N,\ U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p.$$

- la propriété est vraie si $p = N$
- si $U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p$ alors d'après la question 3) avec $n = p+2$ :$U_{p+3} \geq U_{p+2}$ et $U_{p+2} \geq U_{p+1}$ est déjà supposé vrai.

ce qui montre bien :

$$\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n \geq N} \text{ est croissante}}$$

**c)** Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours $Q3$) $U_n = U_{n-2}$ , et donc comme la suite est croissante à partir du rang $N$ : pour $n-2 \geq N$ $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$ . On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante . Ce qui est exclu par le sujet.

$$\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n \geq N+2} \text{ est strictement croissante}}$$

*remarque : attention au plus petit indice pour le quel on peut utiliser les hypothèses.*

**d)** Dans la question 2. on prend $X = U_N, Y = U_{N+1}$ et donc $U_{N+2} = \dfrac{X^2+Y^2}{2}$ on a donc par croissance $X \leq Y \leq \dfrac{X^2+Y^2}{2}$ donc $Y = U_{N+1} \geq 1$ ou $U_N = U_{N+1} = 0$ . le second cas est exclus car la suite n'est pas constante ( si $U_N = U_{N+1} = 0$ on a $U_{N+2} = 0$ et le 1.$c$ s'applique) . Donc $U_{N+1} \geq 1$,donc aussi $U_{N+2} \geq 1$ . A partir $N+2$ la la suite est strictement croissante .Elle converge vers $l > 1$ ou elle diverge vers $+\infty$.D'après la question 1 seule la seconde solution est possible.

$$\boxed{(U_{N+1} \geq U_N \text{ et } U_{N+1} \geq U_{N-1}) \Rightarrow \lim (U_n) = +\infty}$$

5. Même principe en utilisant que $\operatorname{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1})$ =sgn $(U_{N+1} - U_{N-1})$

   **a)**Supposons que $U_{N+1} \leq U_N$ et $U_{N+1} \leq U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que $\operatorname{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \operatorname{sgn}(U_{N+1} - U_{N-}$ et donc $\boxed{U_{N+2} \leq U_{N+1} \leq U_N}$.

   **b)**Par récurrence on a alors

   $$\forall p \geq N,\ U_{p+2} \leq U_{p+1} \leq U_p.$$

   et donc la suite $(U_n)_{n \geq N}$ est décroissante.

   **c)** Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours $Q3$) $U_n = U_{n-2}$ , et donc comme la suite est décroissante à partir du rang $N$, pour $n-2 \geq N$ , $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$ . On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante . Ce qui est exclu par le sujet.

   $$\text{la suite } (U_n)_{n \geq N+2} \text{ est strictement décroissante}$$

   **d)** On prend $X = U_{N+1}, Y = U_N$ et donc $U_{N+2} = \dfrac{X^2+Y^2}{2}$ on a donc par décroissance $\dfrac{X^2+Y^2}{2} \leq X \leq Y$ donc $Y = U_N \leq 1$

   On a $U_{N+2} \leq 1$ puis une suite qui décroît strictement.. La seule limite possible est 0 (cf question 1) on a

   $$\boxed{(U_{N+1} \leq U_N \text{ et } U_{N+1} \leq U_{N-1}) \Rightarrow \lim (U_N) = 0}$$

   *remarque : encore un détail qu'il est souhaitable de bien montrer . au 4.d) on arrive à* $Y = U_{n+1} \geq 1$ *ici c'est* $Y = U_N \leq 1$

6.

   - si $U_0 = \sqrt{2}$ et $U_1 = 0$ on a $U_2 = 1$ , $U_3 = \dfrac{1}{2}$ , $U_4 = \dfrac{5}{8}$ , $U_5 = \dfrac{41}{128}$ on a $U_5$ inférieur ou égal à $U_4$ et à $U_3$ .On peut utiliser la question 5

   $$\boxed{\lim_{+\infty} \left( U_n(\sqrt{2}, 0) \right) = 0}$$

   - si $U_0 = 2$ et $U_1 = 0$ on a $U_2 = 2$ , $U_3 = 2$ , on a $U_3$ supérieur ou égal à $U_2$ et à $U_1$ .On peut utiliser la question 4

   $$\boxed{\lim_{+\infty} (U_n(2,0) = +\infty}$$

7. **a)** par l'absurde on suppose $U_0 = U_1$ et on distingue trois cas :

   - $U_0 = U_1 = U_2$ alors la suite est constante d'après Q1c) , absurde par hypothèse
   - $U_0 = U_1 < U_2$ les hypothèses de I4 avec $N = 1$ s'appliquent $\lim (U_n) = +\infty$ absurde par hypothèse
   - $U_0 = U_1 > U_2$ les hypothèses de I5 s'appliquent $\lim (U_n) = 0$ absurde par hypothèse

   **b)** même principe :($n \geq 2$ pour que $U_{n-2}$ existe)

   - si $U_n = U_{n-1}$ la méthode du a) prouve que c'est absurde en prenant les 3 cas pour $U_{n+1}$ : donc $U_n \neq U_{n-1}$
   - si $U_n < U_{n-1}$ et si $U_n \leq U_{n-2}$ alors $\lim (U_n) = 0$ en prenant $N = n-1$ dans la question 5::donc $U_n < U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} < U_n$

- de même avec la question 4 $U_n > U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} > U_n > U_{n-1}$

$$\boxed{\text{pour } n \geq 2 \text{ , } U_n \text{ est strictement compris entre } U_{n-2} \text{ et } U_{n-1}}$$

**c)** On applique par récurrence la question précédente :

- $U_2$ est strictement compris entre $U_0$ et $U_1$ donc $U_0 < U_2 < U_1$
- $U_3$ est strictement compris entre $U_1$ et $U_2$ donc $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$
- $U_4$ est strictement compris entre $U_2$ et $U_3$ donc $U_0 < U_2 < U_4 < U_3 < U_1$
- On suppose que pour $p$ fixé $U_0 < U_2 < \cdots < U_{2p} < U_{2p+1} < \cdots U_1$
  alors comme $U_{2p+2}$ est strictement compris entre $U_{2p}$ et $U_{2p+1}$ , puis comme $U_{2p+3}$ est strictement compris entre $U_{2p+1}$ et $U_{2p+2}$ on a :
  $$U_0 < U_2 < \cdots < U_{2p} < U_{2p+2} < U_{2p+3} < U_{2p+1} < \cdots U_1$$

La suite des termes paires et croissante majorée par $U_1$ elle converge vers $\lambda > 0$ (car $\lambda \geq U_2 > U_0 \geq 0$ )

La suite des termes impairs est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers $\mu$

Comme $U_{2n+1} = \dfrac{U_{2n}^2 + U_{2n-1}^2}{2}$ on a $\mu = \dfrac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$ et de même $\lambda = \dfrac{\mu^2 + \lambda^2}{2}$ donc $\lambda = \mu > 0$ et donc en reportant $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda > 0$ donc $\lambda = 1$

*Remarque : je n'arrive pas à utiliser directement le théorème des suites adjacentes en prouvant* $\lim (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$

d) On a vu tous les cas possibles :

$$\boxed{Q = E_0 \cup E_1 \cup E_\infty}$$

de plus $E_0$ contient $(0,0)$ et $\left(\sqrt{2},0\right)$ , $E_1$ continent $(1,1)$ et $E_\infty$ contient $(2,0)$

8.

- 1) $\Rightarrow$ 2) . On suppose qu'il existe un entier $N{\geq}0$ tel que $U_N{\geq}1$ et $U_{N+1}{\geq}1$ . D'après 1.$d$ si $U_N{=}1$ et $U_{N+1}{=}1$ la suite est constante (impossible ici) donc $U_N{>}1$ ou $U_{N+1}{>}1$ .
  D'après la formule de récurrence du sujet on a donc que $U_{N+2} > 1$ et $U_{N+3} > 1$ .
  On peut alors vérifié par récurrence double que pour $n \geq N+2$ on a $U_n > 1$ .
  On a d'après la remarque $U_{n+2} \geq U_n U_{n+1} > U_{n+1}$ dès que $n \geq N+2$ . On a donc $U_{n+1} > U_n$ dès que $n \geq N+3$
  La suite est strictement croissante à partir du rang $n+3$
- 2) $\Longrightarrow$ 3) : Si la suite est strictement croissante à partir du rang $P$ on a $U_{P+1} > U_P \geq 0$ . La limite de la suite croissante est plus grande que $U_{P+1}$ donc est non nul.
  Si la limite n'est pas non plus infini (raisonnement par l'absurde) on est dans les hypothèse de la question 7 , et la suite n'est pas strictement croissante.
  La suite tend donc vers $+\infty$.
- 3) $\Longrightarrow$ 1) est évident par définition d'une limite infinie.

On a donc une description de la position de $U_n$ par rapport à 1:

- si deux termes consécutifs sont $> 1$ la suite diverge vers $+\infty$
- si deux termes consécutifs sont $< 1$ la suite converge vers 0
- si la suite oscille indéfiniment autour de 1 elle converge vers 1 .
- il n'y a pas d'autres cas possibles.

# DEUXIEME PARTIE

1. figures en annexe

On utilisera régulièrement que $x$ et $y$ sont positifs pour extrair les racines carrées.

**a)** $U_2(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ , cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{2}$.L'ensemble des $(x,y)$ tels que $U(x,y) \leq 1$ est lr disque intérieur au cercle.

**b)** $U_3(x,y) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(y^2 + \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right) = 1 \Longleftrightarrow 4y^2 + \left(x^2+y^2\right)^2 = 8 \Longleftrightarrow \left(x^2+y^2\right) = \sqrt{8-4y^2}$ et $y \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{8-4y^2}$ et $y \leq \sqrt{2}$

On doit avoir $\sqrt{8-4y^2} - y^2 \geq 0$ ce qui équivaut à $\sqrt{8-4y^2} \geq y^2$ . comme tout est positif on étudie $8 - 4y^2 \geq y^4$ soit $y^4 + 4y^2 - 8 \leq 0$ on résout $Y^2 + 4Y - 8 = 0$ : $y \leq \sqrt{2\sqrt{3}-2}$

On a donc :

$$\boxed{U_3\,(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{8-4y^2} - y^2} \text{ et } 0 \le y \le \sqrt{2\sqrt{3}-2}}$$

$h$ est continue sur $\left[0, \sqrt{2\sqrt{3}-2}\right]$ et et dérivable sur $\left[0, \sqrt{2\sqrt{3}-2}\right[$

$$h'(y) = \frac{\frac{-4y}{\sqrt{8-4y^2}} - 2y}{2h(y)}$$

La fonction $h$ est donc décroissante sur son domaine de définition.

d'où $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$ , $h'(0) = 0$ , $h\left(\sqrt{2\sqrt{3}-2}\right) = 0$ avec une tangente verticale . D'où le graphe de $h$ et celui de $C_3$ par symétrie par rapport à la première bissectrice.

**c)** L'intersection de $C_2$ et $C_3$ est obtenue pour $U_2 = U_3 = 1$ , donc (I.1.d) pour la suite constante égale à 1 : $C_2 \cap C_3 = \{(1,1)\}$

**d)** tout point à l'intérieur de $C_2$ et $C_3$ vérifie $U_2 < 1$ et $U_3 < 1$ donc est dans $E_0$ d'aprèsI7 . de même tout point extérieur aux deux surfaces est dans $E_\infty$ .

2. **a)**pour $k > 1$ : récurrence double

   - $U_0(kx,ky) = kx \ge x = U_0(x,y)$ , $U_1(kx,ky) = ky \ge y = U_1(x,y)$ .
   - Si $U_n(kx,ky) \ge kU_n(x,y)$ et $U_{n-1}(kx,ky) \ge kU_{n-1}(x,y)$ alors $U_{n+1}(kx,ky) \ge k^2U_{n+1}(x,y) \ge kU_{n+1}(x,y)$ car pour $k \ge 1$ , $k^2 \ge k$

   **b)** Si $M \in E_0$ alors $\lim\,(U_n) = 0$ donc à partir d'un certain rang $U_n(x,y) < 1$ . la question précédente donne pour $k < 1$ $U_n(kx,ky) < 1$ donc d'après I.8 $(kx,ky) \in E_0$ .Le résultat est évident si $k = 1$ donc $\boxed{\text{le segment } [OM] \in E_0}$

   Idem avec plus grand que 1. : $M \in E_\infty \Rightarrow$la demi droite $[M, ...[\in E_\infty$

   Si $M \in E_1$ : $\lim\,(U_n(x,y)) = 1$ . soit $k < 1$ on a donc $U_n(kx,ky) \le kU_n(x,y)$ .

   Or $U_n(x,y)$ tend vers 1 alors que $\dfrac{1}{k} > 1$ , donc à partir d'un certain rang $U_n(x,y) < \dfrac{1}{k}$ et donc $U_n(kx,ky) < 1$ et de nouveau **I.8** donne $\lim\,(U_n(kx,ky)) = 0$

   donc $k < 1 \Rightarrow (kx,ky) \in E_0$ . de même $k > 1 \Rightarrow (kx,ky) \in E_\infty$

   $$\boxed{E_0 \cap D = [0, M[\ ,\ E_1 \cap D = \{M\}\,, E_\infty \cap D = ]M, ...]}$$

3. **a)**

   - $O$ est un point de $D \cap E_0$ donc $0 \in \Omega$ .
   - Si $D$ n'est ni horizontale ni verticale $D$ contient des points vérifiant $x > 1$ et $y > 1$ donc $U_0(x,y) > 1$ et $U_1(x,y) > 1$ donc $(x,y) \in E_\infty$ toujours $I.7$

     Si $D$ est horizontale on prend $(2,0)$ déjà connu. ..et si $D$ est verticale $(0,2) \in E_\infty$ car $U_2(0,2) = 2 > 1$ .
   - d'après **II.2.b** il y a au plus un point de $E_1$

   **b)** Il existe un $T$ tel que $M_T \in E_\infty$ . D'après II.3.b on a alors $t \ge T \Rightarrow M_t \in E_\infty \Rightarrow M_t \notin E_0$ . $T$ majore $\Omega$ .

   $\Omega$ étant non vide majoré dans $\mathbb{R}$ , $\gamma$ existe bien.

   **c)** Soit $t < \gamma$ . comme $\gamma = \sup\,(\Omega)$ il existe $T > t$ et $T \in \Omega$ . donc $M_T \in E_0$ et $M_t \in [O, M_T]$ . Donc $M_t \in E_0$ d'après II.3.b

4. a) récurrence double :

   - $U_0$ et $U_1$ sont continues sur $Q$
   - si $U_{n-1}$ et $U_n$ sont continues sur $Q$ alors $U_{n+1}$ est continue sur $Q$ comme produit et combinaison linéaire de fonctions continues.

   **b) par l'absurde :**

   Si la suite $(U_n(\gamma x_0, \gamma y_0))$ tend vers 0 . Donc il existe $N$ tel que $U_N(\gamma x_0, \gamma y_0) \le 1/2$ et $U_{N+1}(\gamma x_0, \gamma y_0) \le 1/2$ . La continuité prouvée à la question précédente montre alors qu'il existe un $\varepsilon$ tel que pour tout $t \in [\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon]$ : $U_N(tx_0, ty_0) \le 1$ et $U_{N+1}(tx_0, ty_0) < 1$ . La suite converge donc vers 0 et en particulier $(U_N((\gamma+\varepsilon)x_0, (\gamma+\varepsilon)\,y_0))$ tend vers 0 et donc $\gamma+\varepsilon \in \Omega$. Ce qui contredit le fait que $\gamma$ majore $\Omega$.

c) Si a suite $(U_n(\gamma x_0, \gamma y_0))$ tend vers $+\infty$, on a de même un $N$ tel que $U_N(\gamma x_0, \gamma y_0) \geq 2$ et $U_{N+1}(\gamma x_0, \gamma y_0) \geq 2$ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon]$ : $U_N(tx_0, ty_0) \geq 1$ et $U_{N+1}(tx_0, ty_0) \geq 1$ et donc $M_{\gamma-\varepsilon} \in E_\infty$ . Or $M_{\gamma-\alpha} \in [0, M_\gamma[$ donc d'après le **II.3.c** $M_{\gamma-\alpha} \in E_0$ : absurde

donc d'après la partition du $I.7$

$$\boxed{M_\gamma \in E_1}$$

On en déduit que toute droite de $Q$ passant par 0 contient un point et un seul de $E_1$ . Avant ce point on est dans $E_0$ et après dans $E_\infty$ .

5. machine à calculer obligatoire .

   On est sur la droite $y = 0$ . On a déjà calculé $\left(\sqrt{2}, 0\right) \in E_0$ et $(2, 0) \in E_\infty$ donc $\sqrt{2} < a < 2$On prend des valeurs $x$ et on calcule la suite $U_n(x, 0)$ . si on trouve deux termes consécutifs strictement inférieur à 1 $(x, 0) \in E_0$ et $x < \alpha$

   et si on trouve deux termes $> 1$ on a $x > a$.

   Le graphe du $II.1$ nous donne mieux : $\sqrt{2\sqrt{2}} \in E_\infty$ : $a \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}\right] = [1,41; 1,68]$ , donc $a = 1,4$ ou $1,5$ ou $1,6$ par défaut

   on trouve $U_3(1,5;0) < 1$ et $U_5(1,5;0) < 1$ donc $1,5 < a$ puis $U_4(1,6;0) > 1$ et $U_5(1,6;0) > 1$ donc $a < 1.6$

$$\boxed{a = 1,5 \text{ à } 0,1 \text{ par défaut}}$$