Numérotation des nombres rationnels

Un ensemble E est dit dénombrable si et seulement si il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E. Cette bijection permet alors de numéroter les éléments de E.

Partie I

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}=\{2k/k\in\mathbb{N}\}$ sont dénombrables.

2. Dans cette question, on désire établir que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
Pour cela on introduit l'application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ définie par :

$$\varphi(n)=n/2 \text{ si } n \text{ est pair et } \varphi(n)=-(n+1)/2 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

2.a Calculer $\varphi(n)$ pour n allant de 0 à 5.

2.b Montrer que l'application φ est bien définie.

2.c Etablir que φ est bijective.

3. Dans cette question, on désire établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
Pour cela on introduit l'application $\varphi:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\varphi(p,q)=2^p(2q+1)$$

3.a Montrer que φ est bien définie et qu'elle est injective.

3.b En observant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'existence d'une plus grande puissance de 2 divisant n, établir que φ est surjective.

3.c Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et qu'il en est de même de $\mathbb{Z}^2$.

4. Dans cette question, on désire établir que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4.a Exhiber une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

4.b On appelle représentant irréductible d'un nombre rationnel r l'unique fraction irréductible p/q égale à r avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
Observer que l'application $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ qui à $r\in\mathbb{Q}$ associe le couple $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ avec p/q le représentant irréductible est injective. Est-elle surjective ?

4.c Former une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

On peut alors conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein dont la démonstration est l'objet de la partie suivante.

Partie II

On veut démontrer le résultat suivant :

« Etant donnés deux ensembles E et F, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors il existe une bijection entre E et F. »

Supposons que $f:E\to F$ et $g:F\to E$ soient deux applications injectives.
On forme $h=g\circ f:E\to E$ et on note $R=\mathcal{C}_E(\operatorname{Im} g)$.

1. On forme $\mathcal{P}=\{M\in\mathcal{P}(E)/R\subset M \text{ et } h(M)\subset M\}$.

1.a Observer que l'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide.

1.b Soit $M\in\mathcal{P}$. Montrer que $h(R)\subset h(M)$ et que $h(h(M))\subset h(M)$.
En déduire que $R\cup h(M)\in\mathcal{P}$.

2. On forme $A=\bigcap\limits_{M\in\mathcal{P}} M$. On remarque que A est inclus dans tout ensemble M appartenant à $\mathcal{P}$.

2.a Montrer que $A\in\mathcal{P}$.

2.b En exploitant II.1.b, établir que $A\subset R\cup h(A)$ puis que $A=R\cup h(A)$.

2.c Montrer que $g^{-1}(A) = f(A)$.

3. On pose $A' = f(A)$, $B = \complement_E A$ et $B' = g^{-1}(B)$.

On considère ensuite les applications $f' : A \to A'$ et $g' : B' \to B$ induites par f et g .

3.a Observer que f' et g' sont bijectives.

3.b Montrer que $B' = \complement_F A'$

4. On introduit enfin l'application $\varphi : E \to F$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x) \text{ si } x \in A \\ g'^{-1}(x) \text{ sinon} \end{cases}.$$

Montrer que φ est bijective.