Correction

Partie I

1. $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n)=n+1$ est bien définie et réalise une bijection.
$\varphi:\mathbb{N}\to\mathcal{P}$ définie par $\varphi(n)=2n$ est bien définie et réalise une bijection.

2.a

n	0	1	2	3	4	5
$\varphi(n)$	0	-1	1	-2	2	-3

.

2.b Si n est pair alors $n/2\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ donc $\varphi(n)\in\mathbb{Z}^+\subset\mathbb{Z}$.
Si n est impair alors $n+1$ est pair et $(n+1)/2\in\mathbb{N}^*$ d'où $\varphi(n)\in\mathbb{Z}^{-*}\subset\mathbb{Z}$.
Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\in\mathbb{Z}$. L'application φ est bien définie.

2.c Supposons $\varphi(n)=\varphi(m)$. Ci dessus on a observé que pour n pair $\varphi(n)\in\mathbb{Z}^+$ et que pour n impair $\varphi(n)\in\mathbb{Z}^{-*}$. $\varphi(n)$ et $\varphi(m)$ étant de même signe, n et m ont même parité. S'ils sont tous deux pairs alors l'égalité $\varphi(n)=\varphi(m)$ donne $n/2=m/2$ puis $n=m$. S'ils sont tous deux impairs, on conclut de même. Ainsi φ est injective.
Soit $p\in\mathbb{Z}$. Si $p\ge 0$ alors $p=\varphi(2p)$ avec $2p\in\mathbb{N}$ donc $p\in\operatorname{Im}\varphi$. Si en revanche $p<0$, alors $p=\varphi(-(2p-1))$ avec $-(2p-1)\in\mathbb{N}$ donc $p\in\operatorname{Im}\varphi$. Finalement φ est surjective.

3.a Pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, $2^p\in\mathbb{N}^*$ et $2q+1\in\mathbb{N}^*$ donc $\varphi(p,q)\in\mathbb{N}^*$. L'application φ est bien définie.
Supposons $\varphi(p,q)=\varphi(p',q')$ alors $2^p(2q+1)=2^{p'}(2q'+1)$. Quitte à échanger les couples (p,q) et (p',q'), on peut supposer $p\ge p'$ et on obtient alors la relation $2^{p-p'}(2q+1)=2q'+1$. Le nombre $2q'+1$ étant impair, on ne peut avoir $p-p'\in\mathbb{N}^*$ et donc $p=p'$. Il reste alors $2q+1=2q'+1$ qui donne $q=q'$. Finalement l'application φ est injective.

3.b Posons $A=\left\{p\in\mathbb{N}/2^p\mid n\right\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $0\in A$. Si $2^p\mid n$ alors $2^p\le n$, or $p\le 2^p$ donc $p\le n$. Ainsi A est majorée (par n) et donc possède un plus grand élément que nous noterons p. Puisque $p\in A$, $2^p\mid n$ ce qui permet d'écrire $n=2^pk$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Or le nombre k est impair car s'il était pair, p ne serait pas le plus grand élément de A. Cela permet donc d'écrire $k=2q+1$ avec $q\in\mathbb{N}$ puis de conclure $n=\varphi(p,q)$.

3.c Par ce qui précède φ est bijective. Puisque $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$ et que $\mathbb{N}^*$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, on peut conclure que $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. L'application réciproque de celle-ci réalise une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^2$ et permet de conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
Si on note φ une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$ (comme en I.2.), l'application $\overline{\varphi}:\mathbb{N}^2\to\mathbb{Z}^2$ définie par $\overline{\varphi}(p,q)=(\varphi(p),\varphi(q))$ réalise clairement une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{Z}^2$. A partir de cette bijection et d'une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^2$, on construit par composition une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}^2$ et on peut conclure que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

4.a L'application φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$ définie par $\varphi(n)=n$ répond au problème.

4.b Si $\varphi(r)=\varphi(r')$ alors $(p,q)=(p',q')$ avec p/q et p'/q' les représentants irréductibles de r et r'. On a alors $p=p'$ et $q=q'$ puis $r=p/q=p'/q'=r'$ d'où l'injectivité de φ. φ n'est revanche pas surjective car par exemple le couple $(2,4)$ n'est pas une valeur prise, puisqu'il ne forme pas une fraction irréductible.

4.c Il suffit de composer φ avec une injection de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{N}$ pour former une injection de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{N}$.

Partie II

1.a Pour $M=E$, on a $R\subset E$ et $h(E)\subset E$ donc $E\in\mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{P}\neq\varnothing$.

1.b On sait $A\subset B\Rightarrow h(A)\subset h(B)$ donc $R\subset M$ et $h(M)\subset M$ donne respectivement $h(R)\subset h(M)$ et $h(h(M))\subset h(M)$. On a bien sûr $R\subset R\cup h(M)$ et puisque $h(R\cup h(M))=h(R)\cup h(h(M))$, on a aussi $h(R\cup h(M))\subset h(M)\subset R\cup h(M)$ donc $R\cup h(M)\in\mathcal{P}$.

2.a Remarquons que A contient tout ensemble inclus dans tous les ensembles de $\mathcal{P}$. Pour tout $M\in\mathcal{P}$, on a $R\subset M$ donc $R\subset A$. De plus, pour tout $M\in\mathcal{P}$, on a $A\subset M$ donc $h(A)\subset h(M)\subset M$. Puisque $h(A)$ est inclus dans tout $M\in\mathcal{P}$, $h(A)\subset A$. Finalement $A\in\mathcal{P}$.

2.b Par II.1.b, $R\cup h(A)\in\mathcal{P}$ donc $A\subset R\cup h(A)$. De plus, puisque $A\in\mathcal{P}$, on a aussi $R\subset A$ et $h(A)\subset A$ de sorte que $R\cup h(A)\subset A$ et donc par double inclusion $A=R\cup h(A)$.

2.c Soit $x\in g^{-1}(A)$. On a $g(x)\in A=R\cup h(A)$. Or $g(x)\in\operatorname{Im}g$ et $R=\mathcal{C}_E(\operatorname{Im}g)$ donc $g(x)\notin R$ et donc $g(x)\in h(A)$. Par suite il existe $a\in A$ tel que $g(x)=h(a)$ c'est à dire $g(x)=g(f(a))$. Or g est injective donc $x=f(a)$ et donc $x\in f(A)$. Ainsi $g^{-1}(A)\subset f(A)$. Inversement, soit $x\in f(A)$. Il existe $a\in A$ tel que $x=f(a)$ et $g(x)=g(f(a))=h(a)\in h(A)\subset A$. Ainsi $x\in g^{-1}(A)$ et donc $f(A)\subset g^{-1}(A)$. Par double inclusion $g^{-1}(A)=f(A)$.

3.a Puisque $A'=f(A)$, l'application f' est surjective par construction. De plus, par restriction d'une application injective, f' est aussi injective. Finalement f' est bijective. Par le même argument g' est aussi injective. $R=\mathcal{C}_E(\operatorname{Im}g)\subset A$ donc par passage au complémentaire $B\subset\operatorname{Im}g$. Par suite tout élément de B possède au moins un antécédent qui par définition de B' appartient à B'. Ainsi g' est surjective et finalement bijective.

3.b Soit $x\in F$. $x\in B'\Leftrightarrow g(x)\in B\Leftrightarrow g(x)\notin A\Leftrightarrow x\notin g^{-1}(A)=f(A)\Leftrightarrow x\notin A'$. Donc $B'=\mathcal{C}_F A'$.

4. Supposons $\varphi(x)=\varphi(x')$. Si $x,x'\in A$ alors l'injectivité de f' permet de conclure $x=x'$. Si $x,x'\notin A$ alors c'est l'injectivité de g'^{-1} qui permet cette fois-ci de conclure. Quitte à inverser x et x', il reste à étudier le cas où $x\in A$ et $x'\notin A$. On a alors $\varphi(x)\in A'=f(A)$ et $\varphi(x')\in B'=g^{-1}(B)$ or $A'\cap B'=\varnothing$ donc l'égalité $\varphi(x)=\varphi(x')$ est dans ce cas impossible. Finalement φ est injective.

Soit $y\in F$. On $y\in A'$ ou $y\in B'$. Dans le premier cas, $y\in\operatorname{Im}f'$ et donc $y\in\operatorname{Im}\varphi$. Dans le second cas, $x=g'(y)\in B$ et $y=g'^{-1}(x)=\varphi(x)\in\operatorname{Im}\varphi$. Dans les deux cas, y est une valeur prise par φ et donc φ est surjective. Finalement φ est bijective.