Nombre de surjections

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels.

Partie I

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $\binom{p}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à p éléments.

1. Rappeler l'expression de $\binom{p}{k}$ à l'aide de nombres factoriels lorsque $k \in \{0,\dots,p\}$.

   Que vaut $\binom{p}{k}$ pour $k > p$ ou $k < 0$?

2. Démontrer, pour tout $0 \le k \le p+1$, la relation $\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} = \binom{p+1}{k}$.

3. Etablir, pour tout $0 \le k \le p+1$, la relation $\binom{p}{k-1} = \dfrac{k}{p+1}\binom{p+1}{k}$

4. On pose $\sigma(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k-p} \binom{p}{k} k^n$.

4.a Calculer $\sigma(0,0)$ et $\sigma(0,p)$ pour $p > 0$.

4.b Montrer : $\sigma(n,p+1) = -\sigma(n,p) + \dfrac{1}{p+1}\sigma(n+1,p+1)$.

Partie II

On note $S(n,p)$ le nombre d'applications surjectives au départ d'un ensemble à n éléments et à l'arrivée dans un ensemble à p éléments.

1. Calculer $S(n,n)$ et $S(n,p)$ pour $p > n$.

2. On considère E un ensemble à $n+1$ éléments et F un ensemble à $p+1$ éléments.

2.a Combien y a-t-il de surjections $f : E \to F$ dont la restriction au départ de $E \setminus \{a\}$ soit encore surjective ?

2.b Combien y a-t-il de surjections $f : E \to F$ dont la restriction au départ de $E \setminus \{a\}$ n'est pas surjective ?

2.c En déduire la relation : $S(n+1,p+1) = (p+1)\big(S(n,p+1) + S(n,p)\big)$.

3. Montrer que $S(n,p) = \sigma(n,p)$.

Partie III

E désigne un ensemble à n éléments.

On appelle partition en p classes d'un ensemble E, toute famille $(A_1,\dots,A_p)$ formée de parties de E telles que $\forall k \in \{1,\dots,p\}, A_k \ne \varnothing$, $\bigcup_{1\le k\le m} A_k = E$ et $\forall k,\ell \in \{1,\dots,p\}, k \ne \ell \Rightarrow A_k \cap A_\ell = \varnothing$.

1. Soit $(A_1,\dots,A_p)$ une partition à p classes de E.

1.a Montrer que $\forall x \in E$, $\exists! k \in \{1,\dots,p\}$ tel que $x \in A_k$.

   On pose alors $f(x) = k$ ce qui définit une application $f : E \to \{1,\dots,p\}$.

1.b Montrer que f est surjective.

2. Inversement, soit $f : E \to \{1, \ldots, p\}$ surjective.
On pose, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $A_k = f^{-1}(\{k\})$.
Montrer que $(A_1, \ldots, A_p)$ est une partition à p classes de E.

3. Déduire de ce qui précède le nombre de partitions à p classes de E.