Correction

Partie I

1. Pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

2. Pour $k = 0$: $\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} = 1 + 0 = 1 = \binom{p+1}{k}$. Pour $k > 0$:
$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} = \frac{p!}{k!(p-k)!} + \frac{p!}{(k-1)!(p-k+1)!} = \frac{p!(p-k+1) + p!k}{k!(p-k+1)!} = \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} = \binom{p+1}{k}.$$

3. Pour $k = 0$: $\binom{p}{k-1} = 0 = \frac{k}{p+1}\binom{p+1}{k}$. Pour $k > 0$:
$$\binom{p}{k-1} = \frac{p!}{(k-1)!(p+1-k)} = \frac{k}{p+1}\frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)} = \frac{k}{p+1}\binom{p+1}{k}.$$

4. $$\begin{aligned}\sigma(n,p+1) &= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-p-1}\binom{p+1}{k}k^n = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-p-1}\left(\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1}\right)k^n \\ &= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-p-1}\binom{p}{k}k^n + \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-p-1}\frac{k}{p+1}\binom{p+1}{k}k^n = -\sigma(n,p) + \frac{1}{p+1}\sigma(n+1,p+1)\end{aligned}$$
.

Partie II

1. Les applications surjectives entre deux ensembles à n éléments correspondent aux applications bijectives. Il y en a $n!$ donc $S(n,n) = n!$.
Il n'existe pas d'applications surjectives au départ d'un ensemble à n éléments et à l'arrivée dans un ensemble à $p > n$ éléments, donc $S(n,p) = 0$ pour $p > n$.

2.a Pour former une application telle que proposée, on part d'une surjection de $E \setminus \{a\}$ vers F, il y en a $S(n,p+1)$ puis on choisit de manière quelconque $f(a)$ dans F, ce qui offre $p+1$ choix.
Au total, il y a $(p+1)S(n,p+1)$ surjections de la forme proposée.

2.b Pour former une application telle que proposée, on choisit un élément de F qui sera l'image de a, il y a $p+1$ choix, puis on prolonge l'application par une surjection de $E \setminus \{a\}$ vers $F \setminus \{f(a)\}$ ce qui offre $S(n,p)$ choix.
Au total, il y a $(p+1)S(n,p)$ surjections de la forme proposée.

2.c Une surjection de E vers F est ou bien de la première forme, ou bien de la seconde, donc $S(n+1,p+1) = (p+1)\big(S(n,p+1) + S(n,p)\big)$.

3. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$:
Pour $p = 0$: $S(0,0) = 0! = 1$ et $\sigma(0,0) = 1$.
Pour $p > 0$: $S(0,p) = 0$ et $\sigma(0,p) = 0$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$S(n+1,p+1) = (p+1)\big(S(n,p+1) + S(n,p)\big) = (p+1)\big(\sigma(n,p+1) + \sigma(n,p)\big) = \sigma(n+1,p+1)$.
Récurrence établie.

Partie III

1.a Existence : $x \in E = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$ donc $\exists k \in \{1,\dots,p\}$ tel que $x \in A_k$.
Unicité : Si $x \in A_k$ et $x \in A_\ell$ (avec $k,\ell \in \{1,\dots,p\}$) alors $A_k \cap A_\ell \neq \varnothing$ donc $k = \ell$.

1.b $\forall k\in\{1,\dots,p\}$, $A_k\neq\varnothing$. Pour $x\in A_k$, on a $f(x)=k$. Ainsi f est surjective.

2. $\forall k\in\{1,\dots,p\}$, $A_k\neq\varnothing$ car puisque f est surjective, l'élément k possède au moins un antécédent.

$\bigcup_{k=1}^{p}A_k\subset E$ et $\forall x\in E$, $x\in A_k$ en prenant $k=f(x)$. Par suite $E\subset\bigcup_{k=1}^{p}A_k$ puis $E=\bigcup_{k=1}^{p}A_k$.

Soit $k,\ell\in\{1,\dots,p\}$, si $A_k\cap A_\ell\neq\varnothing$ alors pour $x\in A_k\cap A_\ell$ on a $f(x)=k$ et $f(x)=\ell$ donc $k=\ell$.

Par contraposée $k\neq\ell\Rightarrow A_k\cap A_\ell=\varnothing$.

Finalement $(A_1,\dots,A_p)$ est une partition à p classes de E.

3. Par ce qui précède, il y a autant de partition à p classes que de fonction surjective de E vers $\{1,\dots,p\}$:

il y a donc $S(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k-p}\binom{p}{k}k^n$ partitions à p classes de E.