Méthode de Newton

Partie I – Théorème du point fixe

Soit $a < b$ deux réels et $I = [a,b]$.

On se donne $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- $\forall x \in I, g(x) \in I$,
- et il existe une constante $\exists k \in [0,1[$ pour laquelle on ait $\forall (x,y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

1.a Justifier que g est continue.

1.b Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution dans l'intervalle $[a,b]$ puis que celle-ci est unique.
Nous la noterons α .

2. Soit $u \in [a,b]$ et (x_n) la suite réelle définie par :
$x_0 = u$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

2.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n - \alpha| \leq k^n |u - \alpha|$.
En déduire la limite de la suite (x_n).

2.b Etablir que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| \leq \dfrac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$.

2.c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

3. On suppose que g est dérivable en α .

3.a Etablir $|g'(\alpha)| \leq k$.

3.b On reprend les notations de la question 2.
Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$.

Partie II – Méthode de Newton

On se donne deux réels $a < b$ réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a,b], f'(x) > 0$.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a,b]$.

1.a Montrer que cette équation possède une unique solution α appartenant à $]a,b[$.

1.b Soit $x_0 \in [a,b]$.
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en x_0 .

2. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2.a Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

2.b Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que f est de surcroît concave.
On considère ensuite la suite (x_n) définie par : $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

3.a Montrer que la suite (x_n) est bien définie, croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a,\alpha]$.

3.b Etablir que $x_n \to \alpha$.

4. On revient au cas général.

4.a Justifier qu'il existe $h > 0$, tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I, |g'(x)| < 1$.

4.b Etablir que $\forall x \in I, g(x) \in I$

4.c Justifier aussi qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \le k|x - y|$.

4.d En déduire que $\forall u \in I$, la suite (x_n) définie par $x_0 = u$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α.

5. On reprend les notations de la question ci-dessus et on suppose de plus que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Etablir que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$.