Correction

d'après CCP PC 1997

Partie I

1.a g est k lipschitzienne donc continue.

1.b Posons $h : x \mapsto g(x) - x$ définie sur $[a,b]$.
h est continue, $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$ donc h s'annule en vertu du TVI.
Par suite l'équation $g(x) = x$ possède au moins une solution.
Notons α et β deux solutions de l'équation $g(x) = x$.
On a $|g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$ donc $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ or $k < 1$ donc $\alpha = \beta$.
Finalement l'équation $g(x) = x$ possède une solution unique.

2.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$
$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha| \underset{HR}{\leq} k^{n+1}|u - \alpha|$.
Récurrence établie.
$k \in [0,1[$ donc $k^n \underset{n\infty}{\to} 0$ et donc $x_n \to \alpha$ par comparaison.

2.b 1ère méthode :
$|x_{n+p} - x_n| \leq |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|$,
$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$,
$|x_{n+p} - x_n| \leq k^{p-1}|x_{n+1} - x_n| + k^{p-2}|x_{n+1} - x_n| + \cdots + k^0|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$
2ème méthode :
Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ en exploitant :
$$|x_{n+p+1} - x_n| \leq |x_{n+p+1} - x_{n+p}| + |x_{n+p} - x_n| \leq k^p|x_{n+1} - x_n| + \frac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1} - x_n|.$$

2.c Quand $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente : $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{1}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$.
Or $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$ donc $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

3.a $g'(\alpha) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}$ or $|g(\alpha + h) - g(\alpha)| \leq k|(\alpha + h) - \alpha| = k|h|$
donc $\left|\dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}\right| \leq k$ puis à la limite quand $h \to 0$: $|g'(\alpha)| \leq k$.

3.b $x_n \to \alpha$ et $\dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \xrightarrow[x \to \alpha]{} g'(\alpha)$ donc par composition de limite :
$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{g(x_n) - g(\alpha)}{x_n - \alpha} \xrightarrow[n\infty]{} g'(\alpha).$$

Partie II

1.a f est continue, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc en vertu du TVI l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]a,b[$. D'autre part f est strictement croissante (donc injective) car $\forall x \in [a,b], f'(x) > 0$, par suite l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir plus d'une solution. Finalement l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]a,b[$.

1.b L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Cette droite coupe l'axe des abscisses ($y = 0$) en un point d'abscisse $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2.a f est f' sont $\mathcal{C}^1$ donc g l'est aussi par opérations.

2.b $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$.

3.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ montrons que x_n existe et $x_n \in [a,\alpha]$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Puisque, par HR, x_n existe et $x_n \in [a,\alpha]$, $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.
x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_n et de l'axe des abscisses.
La fonction f étant concave, sa représentation est en dessous de cette tangente, donc $f(x_{n+1}) \leq 0$ et puisque f est strictement croissante : $x_{n+1} \leq \alpha$.
D'autre part $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq x_n$ car $f(x_n) \leq 0$ et donc $x_{n+1} \geq x_n$.
Ainsi $x_{n+1} \in [x_n, \alpha] \subset [a,\alpha]$. Récurrence établie.
On a vu ci-dessus $x_{n+1} \geq x_n$, la suite (x_n) est croissante.

3.b (x_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une limite ℓ.
$x_n \in [a,\alpha]$ donne à la limite $\ell \in [a,\alpha]$.
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ donne à la limite $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ car f est $\mathcal{C}^1$. Par suite $f(\ell) = 0$ et donc $\ell = \alpha$.

4.a On a $g'(\alpha) = 0$ et g' continue car g est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque $g'(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} 0 < 1$, il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in I = [\alpha - h, \alpha + h], |g'(x)| < 1$ quitte à prendre h suffisamment petit pour que $I \subset [a,b]$.

4.b Par l'inégalité des accroissements finis :
$\forall x \in I, |g(x) - g(\alpha)| \leq 1 \times |x - \alpha|$ donc $|g(x) - \alpha| \leq h$ d'où $g(x) \in I$.

4.c $|g'|$ est continue sur le segment $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, elle y admet donc un maximum en un point $c \in I$.
Posons $k = |g'(c)|$. On a $k \in [0,1[$ car $\forall x \in I, |g'(x)| < 1$.
De plus $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g'(c)| = k$ donc l'inégalité des accroissements finis assure que g est k lipschitzienne.

4.d Les propriétés sont réunies pour exploiter la partie I et conclure.

5. Par la formule de Taylor-Young :
$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$ au voisinage de α.
Puisque $x_n \to \alpha$ on peut écrire : $g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 + o((x_n - \alpha)^2)$
i.e. : $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 + o((x_n - \alpha)^2)$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$.