Matrices magiques

Dans tout le problème les matrices utilisées appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$.

Toute matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ est notée : $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ k & \ell & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$.

On appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$. Elle est formée des matrices :

$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$E_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_8=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_9=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut donc écrire : $M=aE_1+bE_2+cE_3+kE_4+\ell E_5+mE_6+rE_7+sE_8+tE_9$.

A une telle matrice on associe les huit nombres :

$s_1=a+b+c$, $s_2=k+\ell+m$, $s_3=r+s+t$,

$s_4=a+k+r$, $s_5=b+\ell+s$, $s_6=x+m+t$,

$s_7=a+\ell+t$ et $s_8=r+\ell+c$.

On note : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note :

$\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques,

$\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques,

$\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la matrice J

$\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices pour lesquelles le nombre $s_7(M)$ est nul (matrices de trace nulle).

$\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $M_3(\mathbb{R})$ i.e. des matrices dont les 8 nombres $s_1,s_2,\ldots,s_8$ sont égaux entre eux.

1.a Justifier que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $M_3(\mathbb{R})$.

1.b Quelles sont les dimensions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$?

1.c Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
Quelle est sa dimension ?

2. On considère l'application φ qui, à la matrice $M\in M_3(\mathbb{R})$, associe l'élément $(s_1,s_2,\ldots,s_8)$ de $\mathbb{R}^8$.

2.a Montrer que φ est une application linéaire.

2.b Ecrire la matrice de φ en rapportant l'espace de départ $M_3(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^8$ à sa base canonique notée $\mathcal{C}$.

2.c Montrer que le rang de cette matrice est 7.
On pourra remarquer que l'une des lignes est combinaison linéaire des autres, puis considérer une combinaison linéaire nulle des autres lignes.

2.d En déduire la dimension du noyau de φ .

3.a Justifier que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

3.b Montrer que $\mathcal{M}\cap\mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}$.

3.c En observant que $\mathcal{M} \cap \mathcal{T} = \ker \varphi$, déterminer la dimension $\mathcal{M}$.

4.a Déterminer une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ symétrique dont le coefficient d'indice $(1,1)$ vaut 1.

4.b Déterminer une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ antisymétrique dont le coefficient d'indice $(1,3)$ vaut 1.

4.c Former une base de $\mathcal{M}$.

5. Montrer qu'il n'existe qu'une matrice magique vérifiant $a = 1, b = 2, c = 3$ et donner celle-ci.