Correction

d'après Centrale TSI 1997

Partie I

1.a $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ donc $M = 0$. Par suite $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. Posons $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
On a $S \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{A}$ et $M = S + A$ donc $\mathcal{S} + \mathcal{A} = M_3(\mathbb{R})$.
Finalement $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $M_3(\mathbb{R})$.

1.b $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} / a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(S_1,\dots,S_6)$
avec $S_1 = E_1, S_2 = E_4, S_3 = E_9, S_4 = E_2 + E_4, S_5 = E_3 + E_7$ et $S_6 = E_6 + E_8$.
La famille $(S_1,\dots,S_6)$ est clairement libre et donc forme une base de $\mathcal{S}$.
Par suite $\dim \mathcal{S} = 6$ et par supplémentarité $\dim \mathcal{A} = 3$.

1.c $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & \ell & m \\ r & s & -a-\ell \end{pmatrix} / a,b,c,k,\ell,m,r,s,-a-\ell \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(T_1,\dots,T_8)$.
avec $T_1 = E_1 - E_9, T_2 = E_2, T_3 = E_3, T_4 = E_4, T_5 = E_5 - E_9, T_6 = E_6, T_7 = E_7$ et $T_8 = E_8$.
$\mathcal{T}$ est donc un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et comme la famille $(T_1,\dots,T_8)$ est clairement libre, $\dim \mathcal{T} = 8$.

2.a Soit $M, N \in M_3(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{1,\dots,8\}$, on a $s_i(\lambda M + \mu N) = \lambda s_i(M) + \mu s_i(N)$.
Par suite λ est linéaire.

2.b $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.c En notant $L_1,\dots,L_8$ les lignes de la matrice ci-dessus, on observe que $L_1 + L_2 + L_3 = L_4 + L_5 + L_6$.
Par suite $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(L_1,\dots,L_8) = \mathrm{rg}(L_2,\dots,L_8)$.
Supposons $\lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_8 L_8 = 0$:
On obtient le système $\begin{cases} \lambda_4 + \lambda_7 = 0 \\ \lambda_5 = 0 \\ \lambda_6 + \lambda_8 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_7 + \lambda_8 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_6 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_8 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_7 = 0 \end{cases}$ qui donne aisément : $\begin{cases} \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_7 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_6 = 0 \\ \lambda_8 = 0 \end{cases}$.
La famille $(L_2,\dots,L_8)$ étant libre : $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(L_2,\dots,L_8) = 7$.

2.d Par le théorème du rang : $\dim\ker\varphi = \dim M_3(\mathbb{R}) - \operatorname{rg}\varphi = 2$.

3.a $\mathcal{W} = \text{Vect}((1,\ldots,1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^8$ et $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(\mathcal{W})$ donc $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel car image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

3.b $\mathcal{M}\cap\mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$.
Soit $M \in \mathcal{M}\cap\mathcal{T}\cap\mathcal{V}$.
Puisque $M \in \mathcal{V}$, on peut écrire $M = \lambda J$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque $M \in \mathcal{T}$, on a $\lambda+\lambda+\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ puis $M = 0$. Ainsi $\mathcal{M}\cap\mathcal{T}\cap\mathcal{V} = \{0\}$.
Soit $M \in \mathcal{M}$. Posons $\lambda = s_7(M)/3$ et $N = M - \lambda J$ de sorte que $N \in \mathcal{T}$.
On a $M = N + \lambda J$ avec $N \in \mathcal{M}\cap\mathcal{T}$ et $\lambda J \in \mathcal{V}$. Ainsi $(\mathcal{M}\cap\mathcal{T}) + \mathcal{V} = \mathcal{M}$.
Finalement $\mathcal{M}\cap\mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}$.

3.c Les matrices magiques de trace nulle correspondent bien aux éléments de $\ker\varphi$.
Par suite $\dim\mathcal{M}\cap\mathcal{T} = 2$ et comme $\dim\mathcal{V} = 1$ on a par supplémentarité $\dim\mathcal{M} = 3$.

4.a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

4.b $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

4.c Considérons la famille (A,B,J) .
Supposons $\alpha A + \beta B + \gamma J = 0$. On a $\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\alpha-\beta+\gamma & \beta+\gamma \\ -\alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha-\beta+\gamma \\ -\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & -\alpha+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
qui donne aisément $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La famille (A,B,J) est libre et formée de $3 = \dim\mathcal{M}$ éléments de $\mathcal{M}$, c'est donc une base de $\mathcal{M}$.

5. $\begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ -\alpha-\beta+\gamma = 2 \\ \beta+\gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$.

La matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.