CONCOURS PT 2006 épreuve C

1. Première Partie

1. sans problème : $K_0 = \int_0^1 dt = 1$, $K_1 = \int_0^1 (1-t^2)dt = 2/3$, $K_3 = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)dt = \dfrac{8}{15}$

2. On a la combinaison linéaire :
$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}$$
d'où en intégrant termes à termes :
$$\boxed{K_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+1}}$$
qui est bien une somme de $n+1$ fractions rationnelles.

3. On remarque d'abord que le changement de variable C^1 sur $[0, \pi/2]$ $X = \pi/2 - x$ donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ J_n = I_n$$
donc :
   - $I_0 = J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2}$
   - $I_1 = J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1$
   - $I_2 = J_2 = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2 d = \int_0^{\pi/2} \dfrac{1-\cos(2x)}{2} dx = \dfrac{\pi}{4}$

4. On fait dans K_n le changement de variable C^1 : $t = \cos(x)$ on a donc :
$$K_n = \int_0^{\pi/2} (1-\cos(x)^2)^n \sin(x) dx = I_{2n+1}$$
$$\boxed{K_n = I_{2n+1} = J_{2n+1}}$$

5. On effectue maintenant une intégration par partie dans I_n en posant $u = \sin(x)^{n-1}$, $v' = \sin(x)$ donc $v = -\cos(x)$. u et v sont bien C^1 sur $[0, \pi/2]$
$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\cos(x)\sin(x)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x)^{n-2} - \sin(x)^n\right) dx = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \end{aligned}$$
$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

6. Calcul en utilisant déjà la simplification signalée en question 10:
   - $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} = \cdots = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0$
     or $(2p)(2p-2)\cdots 2 = 2^p\,[p(p-1)\cdots 1] = 2^p p!$
     et $(2p-1)(2p-3)\cdots 1 = \dfrac{(2p)(2p-1)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$
$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2}.\frac{\pi}{2}}$$

   Dans la rédaction les "$\cdots$" peuvent être clarifier par une récurrence:

   la formule est vraie si $n = 0$ (et 2) . Si $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{4^p(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2}$ alors
$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}.\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{2p+1}{2(p+1)}.\frac{2p+2}{2(p+1)}.\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{4^p((p+1)!)^2}.\frac{\pi}{2}$$

- De même $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \cdots = \dfrac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1$

$$\boxed{I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} = \frac{4^p\,(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

7. L'inégalité est évidente puisque $\sin(x) \in [0,1]$ et $2p-1 < 2p < 2p+1$

   On intègre alors l'inégalité , les bornes étant dans le bon sens :

$$\boxed{0 \leq I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}}$$

8. D'après la question 5:

$$\frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$$

   D'après la question 7 on a donc :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{2p+1}{2p}$$

   Par théorème d'encadrement, comme les suites (1) et $\left(\dfrac{2p+1}{2p}\right)$ convergent vers la même limite on a

$$\lim_{+\infty} \left(\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}\right) = 1$$

9. D'après les calculs du 6 :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{\left(\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\right)} = \frac{(2p+1)\left[(2p-1)(2p-3)\cdots 1\right]^2}{\left[(2p)(2p-2)\cdots 2\right]^2}\frac{\pi}{2}$$

   ou encore

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}} = \frac{(2p)!(2p+1)!}{16^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

10. On a donc avec la première forme :

$$\frac{1}{p}\left[\frac{(2p)(2p-2)\cdots 4.2}{(2p-1)(2p-3)1}\right]^2 = \frac{2p+1}{p}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\frac{\pi}{2}$$

   donc d'après la limite trouvée en question 5 :

$$\boxed{\lim \left(\frac{1}{p}\left[\frac{(2p)(2p-2)\cdots 4.2}{(2p-1)(2p-3)1}\right]^2\right) = \pi}$$

   remarque : finalement l'expression factorielle ne sert pas dans cette question . Elle servira plus tard seulement

11. De cette limite on déduit l'équivalent

$$\frac{(2p)(2p-2)\cdots 4.2}{(2p-1)(2p-3)1} \sim_{+\infty} \sqrt{p\pi}$$

   Or (question 6)

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$$

   et donc

$$I_{2p} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{p\pi}}.\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

   De plus $I_{2p+1} \sim I_{2p}$(question 8) donc

$$I_{2p+1} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

On a donc

$$\begin{cases} I_{2p} \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2p}} \\ I_{2p+} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2p}} \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{2p+1}} \end{cases}$$

donc

$$\boxed{I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

2. Deuxième Partie

1. Simplification sans problème car $u_n > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$

2. cours :

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$$

On remarque que :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}$$

et donc ($\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= -1 + (n+1/2)\ln(1+1/n) \\ &= -1 + (n+1/2)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

remarque : $n.o(1/n^3) = o(1/n^2)$

$$\boxed{\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{1}{12n^2}}$$

3. D'après l'équivalent précédent on a une suite à termes positifs à partir d'un certain rang , équivalente au terme général d'une série convergente.

$$\boxed{\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ converge}}$$

4. On a donc convergence de la série $\sum \Big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\Big)$. donc (comparaison série $\leftrightarrow$ suite) convergence de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ Soit γ sa limite . .On a donc convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $l = e^\gamma$ par continuité de l'exp .

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } l > 0}$$

5. On a $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{u_n}$ donc comme $l \neq 0$:

$$\boxed{n! \sim \frac{1}{l}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

6. La remarque , et le calcul du I.10 donne :

$$\frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{p\pi}$$

et donc

$$\frac{4^p(\frac{1}{l}\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{p})^2}{\frac{1}{l}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}} \sim \sqrt{p\pi}$$

soit en simplifiant :

$$\frac{1}{l}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \sim \sqrt{p\pi}$$

et donc

$$\boxed{l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

On a démontré la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim \frac{1}{l}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

3. Troisième Partie

1. Calcul un peu pénible mais très classique.
   On a par dérivation termes à termes d'une série entière sur le disque ouvert de convergence : $\forall x \in]-R?r[$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ , \ a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \ , \ a"_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

   L'équation différentielle donne donc :

$$16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

   soit

$$16 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

   On remarque que les termes "manquants" sont tous nuls.:

$$16 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

   Une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \left(16n^2 - 16n + 16n - 1\right) a_n + (-16n^2 - 16n - 8n - 8) a_{n+1} = 0$$

   On a donc comme le dénominateur est non nul :

$$a_{n+1} = \frac{16n^2 - 1}{16n^2 + 24n + 8} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n-1)(2n+1)} a_n$$

   Et donc par translation d'indice :

$$\boxed{a_n = \frac{(4n-5)(4n-3)}{8n(2n-1)} a_{n-1}}$$

2. Si $a_0 \neq 0$, tous les coefficients sont non nuls et pour $x0$ on a : $\lim \left(\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \right) = \lim \left(\frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n-1)(2n+1)} . |x| \right) = |x|$.
   Et donc $\boxed{R = 1}$
   Si $a_0 = 0$, tous les coefficients sont nuls et $R = +\infty$

3. On a pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(4n-3)(4n-5)}{(4n)(4n-2)} a_{n-1} = \frac{(4n-3)(4n-5)}{(4n)(4n-2)} . \frac{(4n-7)(4n-9)}{(4n-4)(4n-6)} a_{n-2} \\ &= \frac{(4n-3)(4n-5)\cdots 1(-1)}{(4n)(4n-2)\cdots(2)} \ a_0 \end{aligned}$$

   Toujours des produits de nombres pairs et impairs :

   - $(4n)(4n-2)\cdots(2) = 2^{2n}(2n)!$

- $(4n-3)(4n-5)\cdots 1 = \dfrac{(4n-2)!}{(4n-2)(4n-4)\cdots 2} = \dfrac{(4n-2)!}{2^{2n-1}(2n-1)!}$

$$\forall n \geq 1 : \, a_n = -\frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!} a_0 = -\frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!}$$

formule qui se vérifie par récurrence
On peut simplifier un peu avant Stirling en multipliant par $(4n-1).(4n) = 2.(2n-1).(4n-1)$

$$\forall n \geq 1 : \, a_n = -\frac{(4n)!}{(4n-1).2^{4n}\,(2n)!^2}$$

formule qui est vraie aussi si $n = 0$

4.

$$\begin{aligned} a_n &\sim -\frac{1}{4n-1}\frac{1}{2^{4n}}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}\sqrt{8\pi n}\left(\frac{1}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}\right)^2 \\ &\sim -\frac{1}{4n}.\frac{(4n)^{4n}.\left(e^{2n}\right)^2.\sqrt{8\pi n}}{2^{4n}.e^{4n}.\left((2n)^{2n}\right)^2 4\pi n} = -\frac{1}{4n}.\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n \sim -\frac{1}{4\sqrt{2\pi} n^{3./2}}}$$