Banque PT , 2000, Math I-A
Partie I

1.) La fonction G de $\mathcal{P} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\right\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $G(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{P}$, comme composée de fonctions de classe C^∞.On calcule successivement :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

et donc : $\Delta G(x,y) = 0$. $\boxed{\text{La fonction } G \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}}$.

2.) Si φ est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors, par composition, $F : (x,y) -> \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{P}$; donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in \mathcal{P},\ \Delta F(x,y) = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right);\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right);\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}\,\varphi''\left(\frac{x}{y}\right);\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\,x}{y^3}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}\,\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)$$

et donc

$$\Delta F(x,y) = \frac{2\,x}{y^3}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4}\right)\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)$$

on pose $t = \frac{x}{y}$ qui est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}$ et donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R},\quad 2\,t\,\varphi'(t) + (1+t^2)\,\varphi''(t) = 0$

C'est une équation différentielle linéaire résoluble d'inconnue $\varphi'(t)$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi'(t) = \lambda\, e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$$

on prend les primitives

$$\boxed{\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi(t) = \lambda \arctan t + \mu}$$

3.) L'application θ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t -> \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$ est impaire, ainsi que l'application sgn, on se limite à $\mathbb{R}^{+*}$.

θ est dérivable sur cet intervalle et $\theta'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{-1/t^2}{1+1/t^2} = 0$. θ est constante or $\theta(1) = \pi/2$

$$\boxed{\text{pour tout réel } t \text{ non nul, } \arctan t + \arctan = sgn(t)\,\frac{\pi}{2}}$$

4.) Si $z = x + i\,y$, $(x,y) \in \mathcal{P}$: on a $\left\{\begin{array}{l} x = |z|\cos(Arg(z)) \\ y = |z|\sin(Arg(z)) \end{array}\right.$. Comme $(x,y) \in \mathcal{P}$, on a $y > 0$ donc $Arg(z) \in]0,\pi[$

- Si $x > 0$, alors $Arg(z) \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\frac{y}{x} = \tan(\ Arg(z))$, donc $Arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x,y)$.
- Si $x < 0$, alors $Arg(z) \in]\frac{\pi}{2},\pi[$ et $\frac{y}{x} = \tan(\ Arg(z)) = \tan(\ Arg(z) - \pi)$, avec $Arg(z) - \pi \in]-\frac{\pi}{2},0[$ donc $Arg(z) - \pi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, d'où

  $Arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x,y)$.
- Si $x = 0$, alors $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$, et $G(x,y) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{P},\quad G(x,y) = \frac{\pi}{2} - \ Arg(x+i\,y)}$$

5.)

- Si $x > 0$, alors $\lim_{y\to 0^+} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $\frac{x}{y}$ tend vers $+\infty$.
- Si $x < 0$, alors $\lim_{y\to 0^+} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}$ car $\frac{x}{y}$ tend vers $-\infty$.
- Si $x = 0$, alors $G(x,y) = 0$, et $\lim_{y\to 0^+} G(x,y) = 0$

$$g(x) = \left|\begin{array}{c} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{array}\right|$$

convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t$:On pose $\theta\ t\ ->\ \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}$ et on montre l'intégrabilité de θ sur $\mathbb{R}$:

- g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et comme $(x,y)\in\mathcal{P}$ on a $y>0$ donc $t->(x-t)^2+y^2$ est continue strictement podsitive.Donc la fonction θ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $t^2\,|\theta(t)| \rightarrow_{t\to+\infty} \left|\frac{\pi\,y}{2}\right|$ limite fine donc θ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- De même θ est intégrable sur $\mathbb{R}^-$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Calcul :

- pour $X>0$ on a : $\displaystyle\int_0^X \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^X \frac{1}{(\frac{t-x}{y})^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{y} = \frac{\pi}{2}\left[\arctan\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_0^X = \frac{\pi}{2}\left[\arctan(\frac{X-x}{y}) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]$
- Si X tend vers $+\infty$: $\int_0^{+\infty}\theta(t)dt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{\pi}{2}G(x,y)$

de même $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,G(x,y)$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathcal{P},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \pi\,G(x,y)}$$

Partie II

1.) La conique n'est pas définie si $\alpha=0$ ou $\alpha=1$. Notons la C_α.

- si $\alpha<0$, on a $\alpha<0$ et $\alpha-1<0$ la conique est vide.
- Si $\alpha>1$,on a $\alpha>0$ et $\alpha-1>0$ la conique est l'ellipse de centre O d'axe focal $x'Ox$ car $\alpha>\alpha-1$,; son équation est de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $a=\sqrt{\alpha}$, et $b=\sqrt{\alpha-1}$.La distance focale c vérifie $c=a^2-b^2=1$, donc $c=1$, et les foyers sont les points $(-1,0)$ et $(1,0)$.
- Si $0<\alpha<1$,$\alpha>0$ et $\alpha-1<0$ la conique est une hyperbole de centre O, d'axe focal $x\prime Ox$; son équation est de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $a=\sqrt{\alpha}$, et $b=\sqrt{1-\alpha}$.La distance focale c vérifie $c=a^2+b^2=1$, donc $c=1$, et les foyers sont les mêmes.

$$\boxed{\text{Les coniques de la famille } \mathcal{F} \text{ ont mêmes foyers } (-1,0) \text{ et } (1,0)}$$

2.) $(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$ étant donné, avec $x_0\neq 0$, la fonction $\psi:\alpha->\frac{x_0^2}{\alpha}+\frac{y_0^2}{\alpha-1}-1$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, et est somme de fonctions décroissantes strictement sur chaque intervalle$]-\infty,0[$, $]0,1[$, ou $]1,+\infty[$.ψ est donc décroissante strictement sur chaque intervalle.

- Sur $]0,1[$ on a $\lim_0(\psi)=+\infty$, $\lim_1(\psi)=-\infty$, et ψ est continue strictement monotone. La restriction de ψ à $]0,1[$ est bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$
- de même la restriction à $]1,+\infty[$ est bijective de $]1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$

La conique C_α de la famille $\mathcal{F}$ passe par $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$, avec $x_0\neq 0$, si et seulement on a $\psi(\alpha)=0$ (avec $\alpha\in]0,1[\cup]1,+\infty[$);par bijection monotone on a donc deux solutions (et seulement 2) , l'une dans $]0,1[$ et l'autre dans $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } (x_0,y_0)\in\mathcal{P}, \text{ avec } x_0\neq 0, \text{ il passe exactement une ellipse et une hyperbole de la famille } \mathcal{F}}$$

.
L'équation $\psi(\alpha)=0$ équivaut à $\alpha^2-\alpha\,(1+x_0^2+y_0^2)+x_0^2=0$; on a donc

$$\boxed{\alpha_1+\alpha_2 = 1+x_0^2+y_0^2\ ,\ \alpha_1\alpha_2 = x_0^2}$$

Si $x_0 = 0$, alors une conique de la famille $\mathcal{F}$ passe par le point $(0, y_0)$ si et seulement si il existe un réel α de $]0,1[\cup]1,+\infty[$ vérifiant
$\frac{y_0^2}{\alpha-1} = 1$ soit $\alpha = 1 + y_0^2 > 1$. Pour tout point $(0, y_0) \in \mathcal{P}$, il passe une conique et une seule de la famille $\mathcal{F}$ et c'est une ellipse.
3.) Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, et C_{α_1}, C_{α_2} les coniques de $\mathcal{F}$ passant par M_0.
La tangente en M_0 à C_α est orthogonal au vecteur gradient $\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha} \\ \frac{2y_0}{\alpha-1} \end{pmatrix}$. Il suffit donc de prouver l'orthogonalité des deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_1} \\ \frac{2y_0}{\alpha_1-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_2} \\ \frac{2y_0}{\alpha_2-1} \end{pmatrix}$ en faisant le produit scalaire : $\frac{2x_0}{\alpha_1}\frac{2x_0}{\alpha_2} + \frac{2y_0}{\alpha_1-1}\frac{2y_0}{\alpha_2-1} = \frac{4x_0^2}{\alpha_1\,\alpha_2} + \frac{4y_0^2}{\alpha_1\,\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)+1} = \frac{4x_0^2}{x_0^2} + \frac{4y_0^2}{x_0^2-(1+x_0^2+y_0^2)+1} = 4 - 4 = 0$ grâce aux relations précédentes.

$$\boxed{\text{Les tangentes en un point commun à deux coniques de } \mathcal{F} \text{ sont orthogonales}}$$

4.) La fonction $x : (u,v) -> \operatorname{ch} u \cos v$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, et

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u,v) = \operatorname{ch} u \cos v = x(u,v), \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}(u,v) = -\operatorname{ch} u \cos v = -x(u,v)$$

donc $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta x(u,v) = 0$, et la fonction x est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
De même, la fonction $y : (u,v) -> \operatorname{sh} u \sin v$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -y$, donc $\Delta y = 0$; la fonction y est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } x \text{ et } y \text{ sont harmoniques sur } \mathbb{R}^2}$$

La matrice jacobienne de H est donné par les dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}(u,v), \frac{\partial H}{\partial y}(u,v)\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v \end{pmatrix}$$

D'ou le jacobien :

$$J(u,v) = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u \left(1 - \sin^2 v\right) + \left(1 + \operatorname{sh}^2 v\right) \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v$$

On a donc $J(u,v) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sh} u = 0$ et $\sin v = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ et $v = 0[\pi]$.

$$\boxed{\text{Le jacobien de } H \text{ s'annule aux points } (0, k\pi),\ k \in \mathbb{Z}}$$

5.)

- Image par H de la droite $u = u_0$: il s'agit de la courbe d'équation $\begin{cases} x = \operatorname{ch} u_0 \cos v \\ y = \operatorname{sh} u_0 \sin v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$.

  - si $u_0 \neq 0$, on reconnaît une ellipse de centre O, d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1$ soit $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{ch}^2 u_0 - 1} = 1$; l'ellipse en question est donc $C_{\operatorname{ch}^2 u_0}$.
  - si $u_0 = 0$, la courbe s'écrit $\begin{cases} x = \cos v \\ y = 0 \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$, et on reconnaît le segment d'extrémités $(-1,0)$ et $(1,0)$, c'est-à-dire les foyers communs..

- Image par H de la droite $v = v_0$: il s'agit de la courbe d'équation $\begin{cases} x = \cos v_0 \operatorname{ch} u \\ y = \sin v_0 \operatorname{sh} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$.

  - si $v_0 \neq 0[\pi/2]$, on reconnaît une branche d'hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1$ soit $\frac{x^2}{\cos^2 v_0} + \frac{y^2}{\cos^2 v_0 - 1} = 1$; l'hyperbole en question est donc $C_{\cos^2 v_0}$; la branche parcourue est celle située dans le demi-plan où x a le signe de $\cos v_0$

remarque :contrairement à ce que laisse penser le sujet nous n'obtenons pas l'hyperbole entière.

-
  - si $v_0 = 0[\pi]$, la courbe s'écrit $\begin{cases} x = \cos v_0 \operatorname{ch} u \\ y = 0 \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$ (avec $\sin v_0 = \pm 1$). On obtient les demi-droites $[Fx)$ (cas $\sin v_0 = 1$) et $(x'F']$ (cas $\sin v_0 = -1$).
  - si $v_0 = \frac{\pi}{2}[\pi]$, la courbe s'écrit $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sin v_0 \operatorname{sh} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$ et on obtient l'axe des ordonnées en entier.

- Recherche des images réciproques par H des coniques C_α, et des axes $x'Ox$, $y'Oy$:

  Soit C_α la conique d'équation $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha-1}=1$ ($\alpha\in]0,1[\cup]1,+\infty[$).

  $H^{-1}(C_\alpha)=\Big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\text{ch}^2u\cos^2v}{\alpha}+\frac{\text{sh}^2u\sin^2v}{\alpha-1}=1\Big\}$.

  – Si $\alpha>1$, soit $u_0=$argch$\sqrt{\alpha}$. On cherche les couples (u,v) tels que

  $$\begin{aligned}\frac{\text{ch}^2u\cos^2v}{\text{ch}^2u_0}+\frac{\text{sh}^2u\sin^2v}{\text{sh}^2u_0} &= 1\Leftrightarrow\frac{\text{ch}^2u\cos^2v}{\text{ch}^2u_0}+\frac{\text{sh}^2u\sin^2v}{\text{sh}^2u_0}=\cos^2v+\sin^2v\\ &\Leftrightarrow\left(\frac{\text{ch}^2u}{\text{ch}^2u_0}-1\right)\cos^2v+\left(\frac{\text{sh}^2u}{\text{sh}^2u_0}-1\right)\sin^2v=0\end{aligned}$$

  La fonction $u->\left(\frac{\text{ch}^2u}{\text{ch}^2u_0}-1\right)\cos^2v+\left(\frac{\text{sh}^2u}{\text{sh}^2u_0}-1\right)\sin^2v$ est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ .Elle admet donc au plus une racine . Or $u=u_0$ est racine évidente donc $u=\pm u_0$, et tout réel v convient. On obtient donc deux droites.

  $$\boxed{\text{si }\alpha>1,\ H^{-1}(C_\alpha)=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u=\pm\,\text{argch}(\sqrt{\alpha}),\ v\in\mathbb{R}\big\}}$$

  – Si $\alpha\in]0,1[$, alors soit $v_0=\arccos\sqrt{\alpha}$. et on cherche les couples (u,v) tels que

  $$\begin{aligned}\frac{\text{ch}^2u\cos^2v}{\cos^2v_0}-\frac{\text{sh}^2u\sin^2v}{\sin^2v_0} &= 1\Leftrightarrow\frac{\text{ch}^2u\cos^2v}{\cos^2v_0}-\frac{\text{sh}^2u\sin^2v}{\sin^2v_0}=\text{ch}^2u-\text{sh}^2u\\ &\Leftrightarrow\left(\frac{\cos^2v}{\cos^2v_0}-1\right)\text{ch}^2u-\left(\frac{\sin^2v}{\sin^2v_0}-1\right)\text{sh}^2u=0\end{aligned}$$

  On peut alors étudier $v->\left(\frac{\cos^2v}{\cos^2v_0}-1\right)\ \text{ch}^2u-\left(\frac{\sin^2v}{\sin^2v_0}-1\right)\ \text{sh}^2u$ sur $[0,\pi/2]$ de dérivée strictement négative. Donc on a une seule racine sur $[0,\pi/2]$, $v=v_0$. Sur $\mathbb{R}$ on a donc $\sin v=\pm\sin v_0$ et $\cos v=\pm\cos v_0$ soit $v=\pm\arccos\sqrt{\alpha}[2\pi]$, ou $v=\pi\pm\arccos\sqrt{\alpha}[2\pi]$ et tout réel u convient.On obtient une infinité de droites.

  $$\boxed{\text{si }\alpha>1,\ H^{-1}(C_\alpha)=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ v=\pm\arccos(\sqrt{\alpha}),\ u\in\mathbb{R}\big\}\cup\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ v=\pi\pm\arccos(\sqrt{\alpha}),\ u\in\mathbb{R}\big\}}$$

  – $H^{-1}(x'Ox)=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \text{sh}\,u\,\sin v=0\big\}=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ u=0\text{ ou }v=0[\pi]\big\}$.Ce sont les deux axes de coordonnées

  – $H^{-1}(y'Oy)=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \text{ch}\,u\,\cos v=0\big\}=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ v=\frac{\pi}{2}[\pi]\big\}$.C'est une infinité de droites.

- Montrons que la restriction de H à $]0,+\infty[\times]0,\pi[$ est une bijection de $]0,+\infty[\times]0,\pi[$ sur $\mathcal{P}$

  $$\forall(x_0,y_0)\in\mathcal{P},\ \exists!(u_0,v_0)\in]0,+\infty[\times]0,\pi[,H(u_0,v_0)=(x_0,y_0)$$

  – si $x_0\neq0$, alors par (x_0,y_0) il passe exactement une ellipse C_{α_1} et une hyperbole C_{α_2} de la famille $\mathcal{F}$ ($\alpha_1>1$ et $0<\alpha_2<1$).

  D'après l'étude précédente, il existe un unique réel strictement positif $u_0>0$ tel que l'image réciproque $H^{-1}(C_{\alpha_1})$ soit la droite d'équation $u=u_0$.

  De même, il existe un unique réel v_0 de $]0,\pi[$ tel que l'image réciproque $H^{-1}(K_{\alpha_2})$ de la branche K_{α_2} de C_{α_2} contenant (x_0,y_0) soit la droite d'équation $v=v_0$: c'est $v_0=\arccos\sqrt{\alpha_2}$ si $x_0>0$, et $v_0=\pi-\arccos\sqrt{\alpha_2}$ si $x_0<0$.

  Donc, $H^{-1}(x_0,y_0)=H^{-1}(C_{\alpha_1}\cap K_{\alpha_2})=H^{-1}(C_{\alpha_1})\cap H^{-1}(K_{\alpha_2})=\{(u_0,v_0)\}$

  – si $x_0=0$, alors le système d'inconnues $(u,v)\in]0,+\infty[\times]0,\pi[$: $\begin{cases}\text{ch}\,u\cos v=0\\ \text{sh}\,u\sin v=y_0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}v=\pi/2\\ u=\text{argsh}(y_0)\end{cases}$

  $$\boxed{\text{la restriction de }H\text{ à }]0,+\infty[\times]0,\pi[\text{ est une bijection de }]0,+\infty[\times]0,\pi[\text{ sur }\mathcal{P}}$$

6) En supposant que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, $f\circ H$ est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et on a successivement (le théorème de Schwarz s'applique) :

$$\frac{\partial f\circ H}{\partial u}(u,v)=\text{sh}\,u\,\cos v\frac{\partial f}{\partial x}\left(H(u,v)\right)+\text{ch}\,u\,\sin v\frac{\partial f}{\partial y}\left(H(u,v)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ H}{\partial u^2}(u,v) &= \operatorname{ch} u\cos v\frac{\partial f}{\partial x}\left(H(u,v)\right)+\operatorname{sh}^2 u\cos^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(H(u,v)\right)+\operatorname{sh} u\cos v\operatorname{ch} u\sin v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(H(u,v)\right)\\ &\quad+\operatorname{sh} u\sin v\frac{\partial f}{\partial y}\left(H(u,v)\right)+\operatorname{ch} u\sin v\operatorname{sh} u\cos v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(H(u,v)\right)+\operatorname{ch}^2 u\sin^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(H(u,v)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ H}{\partial u^2}(u,v) &= \operatorname{ch} u\ \cos v\ \frac{\partial f}{\partial x}(H(u,v))+\operatorname{sh} u\ \sin v\ \frac{\partial f}{\partial y}(H(u,v))\\ &\quad+\operatorname{sh}^2 u\ \cos^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u,v))+\operatorname{ch}^2 u\ \sin^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u,v))+2\operatorname{sh} u\ \operatorname{ch} u\ \sin v\ \cos v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(H(u,v))\end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial f\circ H}{\partial v}(u,v)=-\operatorname{ch} u\ \sin v\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(H(u,v)\right)+\operatorname{sh} u\ \cos v\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(H(u,v)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ H}{\partial v^2}(u,v) &= -\operatorname{ch} u\ \cos v\ \frac{\partial f}{\partial x}(H(u,v))+\operatorname{ch}^2 u\ \sin^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u,v))-\operatorname{ch} u\ \sin v\ \operatorname{sh} u\ \cos v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(H(u,v))\\ &\quad-\operatorname{sh} u\ \sin v\ \frac{\partial f}{\partial y}(H(u,v))+\operatorname{sh} u\ \cos v\ (-\operatorname{ch} u\ \sin v)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(H(u,v))+\operatorname{sh}^2 u\ \cos^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u,v))\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ H}{\partial v^2}(u,v) &= -\operatorname{ch} u\ \cos v\ \frac{\partial f}{\partial x}(H(u,v))-\operatorname{sh} u\ \sin v\ \frac{\partial f}{\partial y}(H(u,v))\\ &\quad+\operatorname{ch}^2 u\ \sin^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(H(u,v))+\operatorname{sh}^2 u\ \cos^2 v\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(H(u,v))-2\operatorname{sh} u\ \operatorname{ch} u\ \sin v\ \cos v\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(H(u,v))\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta\left(f\circ H\right)(u,v)=J(u,v)\Delta f\left(H(u,v)\right)$$

Si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, alors par composition, $f\circ H$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[$, et le calcul précédent montre qu'alors $\Delta\left(f\circ H\right)=0$ sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}\text{, la fonction } f\circ H \text{ est harmonique sur }]0,+\infty[\times]0,\pi[}$$

Partie III

Dans toute cette partie l'hypothèse $r<b$ assure que $D_r\subset\mathcal{P}$ et donc que $f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ est bien défini , continu.
1.)

- Dans l'intégrale $\int\int_{D_r} f(u,v)dudv$, on fait le changement de variables défini, en passant en polaire de centre (a,b) : $\begin{cases} x=a+\rho\cos\theta\\ y=b+\rho\sin\theta\end{cases}$

  Le jacobien est ρ, et le disque fermé de centre (a,b) et de rayon r est obtenu pour $\begin{cases} 0\le\rho\le r\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$.

  On a donc

$$\int\int_{D_r} f(u,v)dudv=\int_0^r d\rho\left(\int_0^{2\pi} f\left(a+\rho\cos\theta,b+\rho\sin\theta\right)\rho d d\theta\right)=2\pi\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

- En employant la formule de Green-Riemann avec $P=-\frac{\partial f}{\partial y}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\mathcal{D}=D_r$, on obtient :

  $\int\int_{D_r}\Delta f(u,v)dudv=\int_{\Gamma_r^+}-\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\,\mathrm{d}v$ où Γ_r^+ est le cercle de centre (a,b) de rayon r parcouru dans le sens direct;

  en paramétrant le cercle par $\begin{cases} u=a+r\cos\theta\\ v=b+r\sin\theta\end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi]$, l'orientation étant celle des θ croissants, on obtient

$$\int\int_{D_r}\Delta f(u,v)dudv=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)(r\cos\theta)\right)d\theta$$

Donc :

$$\int\int_{D_r} \Delta f(u,v)dudv = r\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\,\cos\theta, b+r\,\sin\theta)\,\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a+r\,\cos\theta, b+r\,\sin\theta)\,\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta$$

2.) On doit prouver la continuité d'une intégrale à paramètre.

- $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, $r- > f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est continue sur $[0, b[$ (car $(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \in \mathcal{P}$)
- $\forall r \in [0, b[$, $\theta- > f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, donc intégrable sure ce segment
- on a domination sur tout segment $[0, R] \subset [0, b[$: f est continue sur le compact $B(0, R) \subset \mathcal{P}$, donc bornée sur ce compact $\forall\,(r, \theta) \in$: $[0, R] \times [0, 2\pi]$ $|f(a+ r\cos\theta, b + r\sin\theta)| \leq \|f\|_\infty$ fonction constante donc intégrable sur le segment.

$$\boxed{r- > m(a,b,r) \text{ est continue sur } [0,b[}$$

3.) En employant le résultat du **III** 1.), $M(a, b, r) = \frac{2}{r^2}\ \int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\,\mathrm{d}\rho$,or $\int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\,\mathrm{d}\rho$ est une primitive.

- L'application $\rho - > \rho\, m(a, b, \rho)$ est continue sur $[0, b[$, donc, par primitive d'une fonction continue, l'application $r - > \displaystyle\int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\mathrm{d}\rho$ est de classe C^1, sur $[0, b[$. Et donc $r- >M(a, b, r) = \frac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\mathrm{d}\rho$ est continue sur $]0, b[$.
- Étude de la continuité en 0 :

$$M(a,b,r) - f(a,b) = \frac{2}{r^2}\left(\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho - \frac{r^2}{2}f(a,b)\right) = \frac{2}{r^2}\left(\int_0^r (\rho m(a,b,\rho) - \rho f(a,b))\,d\rho\right)$$

L'application $\rho - > \rho\, m(a, b, \rho)$ est continue en 0, et $m(a, b, 0) = f(a, b)$, donc :

$$M(a,b,r) - f(a,b) = \frac{2}{r^2}\left(\int_0^r \rho\,(m(a,b,\rho) - m(a,b,0)\,d\rho\right)$$

On écrit la continuité en 0

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ 0 \leq \rho \leq \alpha \Rightarrow |m(a,b,\rho) - m(a,b,0)| \leq \varepsilon$$

Il en résulte :

$$r \leq \alpha \Rightarrow |M(a,b,r) - f(a,b)| \leq \frac{2}{r^2}\int_0^r \rho\,\varepsilon\,\mathrm{d}\rho = \varepsilon$$

et donc

$$\boxed{r - > M(a,b,r) \text{ est continue en } 0}$$

4.) On doit prouver la dérivabilité d'une intégrale à paramètre , que l'on sait être continue .
On a $\frac{\partial f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta$
f étant C^∞ on a :

- $r- > \frac{\partial f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)}{\partial r}$ continue sur $[0, b[$
- $\theta- > \frac{\partial f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)}{\partial r}$ continue sur $[0, 2\pi]$ donc intégrable sur ce segment
- On a domination sur tout segment $[0, R] \subset [0, b[$: par continuité sur le compact $B(0, R)$ on a domination par une constante (idem III.2.)

L'application $r - > m(a, b, r)$ est de classe C^1 sur $[0, b[$. En particulier, $r - > m(a, b, r)$ est dérivable sur $]0, b[$.
Sa dérivée s'obtient par la règle de Leibniz, et on a :
$\forall r \in]0, b[,\ \frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi}\ \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta$
Grâce au **III** 2°), on a encore :

$$\boxed{\forall r \in]0,b[,\ \frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi r}\ \int\int_{D_r} \Delta f(u,v)dudv}$$

l'hypothèse $r > 0$ ne sert que pour le calcul de la dérivée , pas pour la classe
5 On a prouvé au **III** 3.) que l'application $r - > \displaystyle\int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\mathrm{d}\rho$ est de classe C^1 sur $]0, b[$ donc aussi $r- > M(a, b, r) = \frac{2}{r^2}$ $\int_0^r \rho\, m(a, b, \rho)\,\mathrm{d}\rho$ par quotient par une fonction C^1 non nulle.
On calcule (dérivation d'un produit et d'une primitive) :

$$\frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = -\frac{4}{r^3}\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho + \frac{2}{r^2}\left(r\, m(a,b,r)\right) = \frac{2}{r}\ \left(m(a,b,r) - M(a,b,r)\right)$$

Partie IV

1.) Si f est harmonique sur $\mathcal{P}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III** 4.), pour tout r de $]0,b[$, $\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi\, r}\int\int_{D_r} \Delta f(u,v)dudv = 0$.
La fonction $r -> m(a,b,r)$ est donc constante sur $]0,b[$, et, par continuité, sur $[0,b[$.
Comme $m(a,b,0) = f(a,b)$, on a : $\forall r \in [0,b[,\ m(a,b,r) = f(a,b)$.

$\boxed{\text{si } f \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}, \text{ alors } f \text{ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur } \mathcal{P}}$

2.) Si f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III** 1.),

$$\int\int_{D_r} f(u,v)dudv = 2\pi\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\, f(a,b)\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho = \pi\, r^2\ f(a,b)$$

d'où $M(a,b,r) = f(a,b)$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ possède la propriété de moyenne circulaire sur } \mathcal{P}, \text{ elle possède la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}}$

3.) Si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathcal{P}$, et
$\forall r \in]0,b[,\ \frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = 0$.
En utilisant le **III** 5), il en résulte que pour tout r de $]0,b[$, $m(a,b,r) = M(a,b,r) = f(a,b)$, donc f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ possède la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}, \text{ elle possède la propriété de moyenne circulaire sur } \mathcal{P}}$

4 Montrons que si f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, il en va de même pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.On va passer grâce à l'équivalence précédente par la moyenne circulaire :
On doit donc montrer :

$$\left(\forall (a,b)\in\mathcal{P}, \forall r\in]0,b[, f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)d\theta\right)$$
$$\Longrightarrow \quad \left(\forall (a,b)\in\mathcal{P}, \forall r\in]0,b[, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)d\theta\right)$$

C'est donc un problème de dérivation sous le signe $\int$,par rapport à la variable a :

- $a- > \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta$ est continue
- $\theta- > \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0,2\pi]$ (toujours car comme $r<b$ on reste dans $\mathcal{P}$)
- On prend $[A,B]\subset\mathbb{R}$; par continuité de$(a,\theta)- > \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ sur le compact $(a,\theta)\in[A,B]\times[0,2\pi]$ la fonction y est dominé par une constante intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

On peut appliquer la formule de Leibniz.
$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\,\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\ \cos\theta, b+r\ \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$
$\frac{\partial f}{\partial x}$ possède les propriétés de moyenne circulaire et spaciale sur $\mathcal{P}$
On procède de même pour démontrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ possède la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$ en prenant $[A,B]\subset\mathbb{R}^{+*}$ et en dérivant par rapport à b.

$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}, \text{ il en va de même pour ses dérivées partielles d'ordre 1}}$

En itérant cette propriété, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vérifient aussi la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.
Par linéarité Δf la vérifie aussi.

$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}, \text{ il en va de même pour } \Delta f.}$

5.) Si f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, alors pour tout (a,b) de $\mathcal{P}$, et tout r de $]0,b[$, $\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = 0$.
D'après le **III** 4.), cela implique $\int\int_{D_r}\Delta f(u,v)dudv$= 0.
D'après la question précédente, Δf vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, donc pour tout (a,b) de $\mathcal{P}$, et tout r de $]0,b[$, $\frac{1}{\pi\, r^2}\int\int_{D_r}\Delta f(u,v)dudv = \frac{1}{\pi\, r^2}\int\int_{D_r}\Delta f(a,b)dudv = \Delta f(a,b)$.
On a donc : pour tout (a,b) de $\mathcal{P}$, $\Delta f(a,b) = 0$, et f est harmonique sur $\mathcal{P}$.

$\boxed{f \text{ est harmonique ssi } f \text{ vérifie la propriété de moyenne circulaire ssi } f \text{ vérifie la propriété de moyenne spaciale.}}$