PT 2004 Math IIB

1. Etude de la fonction Bêta

1. **a)** Soit $x \in]0, +\infty[.(1-\dfrac{x}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}$. Or $\ln(1+x) \sim_0 x$ et donc $\lim \left\{n\ln(1-\dfrac{x}{n})\right\} = -x$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}}$$

b) φ_n est défini par morceaux , continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, non continue en n . par contre φ_n est C^1 sur $[0, n[$ et $]n, +\infty[$

On a donc sur $[0, n[$

$$\varphi_n{}'(x) = -e^{-x} + \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} = -e^{-x} + e^{(n-1)\ln(1-\frac{x}{n})} = e^{-x}(e^{\psi_n(x)} - 1).$$

Le signe de ϕ'_n est donc celui de la fonction C^1 sur $[0, n]$ ψ_n. Or $\psi_n{}'(x) = (n-1)\dfrac{-1/n}{1-x/n} + 1 = 1 - \dfrac{n-1}{n-x} = \dfrac{1-x}{n-x}$, .

Le tableau de variations de φ_n ne pose plus de problème

x	0		1		α_n		n
$\psi_n{}'(x)$		$+$	0		$-$		$\Vert$
$\psi_n(x)$	0	$\nearrow$	>0	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Par bijection monotone sur $[1, n[$ (fonction continue strictement monotone) il existe un unique réel $\alpha_n \in]1, n[$ tel que $\psi_n(\alpha_n) = 0$,.

Ce qui nous donne le tableau des variations de φ_n :

x	0		α_n		n
$\varphi_n{}'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$\phi_n(\alpha_n)$	$\searrow$	e^{-n}

c) La question précédente montre bien l'existence et l'unicité de $\alpha_n \in]1, n[$ tel que φ_n soit maximale en α_n.De plus $(n-1)\ln(1-\dfrac{\alpha_n}{n}) = \alpha_n = 0$.

d) De plus, nous avons $\psi_n(\alpha_n) = 0$ et donc $(n-1)\ln\left(1-\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = -\alpha_n$, ce qui donne

$$n\ln\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right) = -\alpha_n + \ln(1-\frac{\alpha_n}{n}) \text{ et donc } \left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_{nn}}(1-\frac{\alpha_n}{n})$$

d'où le calcul :

$$\varphi_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n}[1-(1-\frac{\alpha_n}{n})] = \frac{\alpha_n}{n}e^{-\alpha_n}$$

$$\boxed{\varphi_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n}e^{-\alpha_n}}$$

Posant $g : x \mapsto xe^{-x}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) =^{-x} (1-x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		1		n
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

En particulier, $\forall x \in [0, n]$, $g(x) \leq \dfrac{1}{e}$,

d'où $\alpha_n e^{-\alpha_n} \leq \dfrac{1}{e}$, soit :

$$\boxed{\varphi_n(\alpha_n) \leq \frac{1}{ne}.}$$

f) graphe sans problème (quoique sur vos copies la non continuité en n soit souvent oubliée)

2. Avant tout calcul vérifions l'existence de l'intégrale: :

- $t->\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}$ est continue positive sur $]0,+\infty[$
- sur $]0,1]$ la fonction est intégrable car $\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \sim_0 \dfrac{1}{t^{1-u}}$ avec $1-u>1$
- sur $[1,+\infty[$ elle est aussi intégrable car $t^{1+v}.\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}$ tend vers 1 avec $1+v>1$

$$\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{u-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+v}}.$$

a)On remarque que **:**

$$\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} = \left(\frac{t}{1+t}\right)^u \left(\frac{1}{1+t}\right)^v \frac{1}{t}$$

comme $\dfrac{1}{1+t} = 1-\dfrac{t}{1+t}$ on peut envisager le changement de variable $x=\dfrac{t}{1+t}$:

Il est C^1 bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$ d'où $t=\dfrac{x}{1-x}$ et $dt=\dfrac{dx}{(1-x)^2}$

$$B(u,v)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}dt=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{u-1}(1-x)^{u+v}\frac{1}{(1-x)^2}dx=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx.$$

$$\boxed{B(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt}$$

b)On effectue dans l'expression précédente le changement de variable $x=1-t$ pour obtenir l'égalité $\boxed{B(u,v)=B(v,u)}$.

c)Calculons, en utilisant une intégration par parties sur $[x,y]\subset]0,+\infty[$:on pose

$$U=t^u, U'=ut^{u-1}, V'=\frac{1}{(1+t)^{u+v+1}}, V=\frac{-1}{(u+v)(1+t)^{u+v}}$$

d'où :

$$\int_x^y \frac{t^u}{(1+t)^{u+v}+1}dt=\left[\frac{-t^u}{(u+v)(1+t)^{u+v}}\right]_x^y+\frac{u}{u+v}\int_x^y\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}dt$$

les deux intégrales convergent $\dfrac{-x^u}{(u+v)(1+x)^{u+v}}$ a une limite nulle en 0 et $\dfrac{-y^u}{(u+v)(1+y)^{u+v}}\sim\dfrac{-1}{(u+v)y^v}$ a une limite nulle en $+\infty$ donc par passage à la limite :

$$\boxed{B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v+1)}$$

Remarque 1 :On peut utiliser la forme trouvée ci dessus , mais il faut êttre beaucoup plus astucieux.

3.

a)Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On prend le changement de variable $x=\dfrac{t}{n}$, qui nous donne directement

$$I_n(x)=\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt=\int_0^1(1-x)^n(nx)^{x-1}ndx=n^xB(n+1,x).$$

b)D'après la question précédente, $I_n(x)=n^xB(n+1,x)$. Or **I.2.c)** montre que $B(n+1,x)=\dfrac{n}{n+x}B(n,x)$. Par suite, une récurrence sur $n\in N^*$ montre que

$$I_n(x)=n^x\frac{n!}{(x+n)...(x+1)}B(1,x).$$

Mais $B(1,x)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$, d'où

$$\boxed{I_n(x)=n^x\frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}}.$$

Comme $x>0$, tous les dénominateurs sont bien non nuls.

2. Etude de la fonction Gamma

1. Pour tout $x > 0$

   - la fonction $t -> e^{-t}t^{x-1}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$
   - sur $]0, 1]$ la fonction est intégrable car $e^{-t}t^{x-1} \sim_0 \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$
   - sur $[1, +\infty[$ la fonction est intégrable car $t^2.e^{-t}t^{x-1}$ a une limite nulle en $+\infty$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a)Γ_n est une intégrale à paramètre définie sur un segment

   - pour tout $t \in [1/n, n]$, $x -> e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $t -> e^{-t}t^{x-1}$ donc y est intégrable
   - on a domination sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ car :

   $$\begin{cases} \text{si } t \leq 1 \text{ , } \ln(t) \leq 0 \text{ donc } e^{-t}t^{a-1} \\ \text{si } t \geq 1 \text{ , } \ln(t) \geq 0 \text{ donc } e^{-t}t^{b-1} \end{cases}$$

   donc on a domination par $\Phi : x -> \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$ continue (même en 1) donc intégrable sur le segment $\left[\dfrac{1}{n}, n\right]$

   $$\boxed{\Gamma_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

   b)La convergence de Γ implique que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,+\infty)} \int_x^y e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x)$. Donc par composition des limites,

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)}$$

   .

   c) $\Gamma_n(1) = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}dt = e^{-\frac{1}{n}} - e^{-n}$ d'où par passage à la limite quand $[n \to +\infty]$, $\boxed{\Gamma(1) = 1}$.

   d)Par intégration par partie

   $$\Gamma_N(n) = \int_{1/N}^{N} e^{-t}t^{n-1}dt = [-e^{-t}t^{n-1}]_{1/N}^{N} + (n-1)\int_{1/N}^{N} e^{-t}t^{n-2}dt = e^{-1/N}(1/N)^{n-1} - e^{-N}N^{n-1} + (n-1)\Gamma_N(n-1).$$

   d'où par passage à la limite pour $n \geq 2$:

   $$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

   D'où par récurrence

   $$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}.$$

3. Soit $x > 1$. Le même calcul qu'à la question précédente donne la relation :

   $$\boxed{\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)}$$

   Avec cette formule, on peut prolonger Γ à $]-1, 0[$ en posant comme $x \neq 0$:

   $$\forall x \in]-1, 0[, \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

   Et par récurrence si on a définit Γ sur $]-p, -p+1[$ la même formule permet alors de prolonger Γ à $]-p-1, -p[$ et donc d'obtenir un prolongement de Γ à $]-\infty, 0[\backslash\mathbb{Z}$, qui satisfait la relation $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

   Remarque : "En déduire" donc c'est sûrement cette réponse qui est attendu (et qui sert après) mais ce n'est pas le seul prolongement possible.

4. Soit $x > 0$.

a)Soit $\varepsilon > 0$.

La convergence de Γ implique que $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_y^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = 0$. Par suite,

$$\exists A > 0 \ , \ y \geq A \Rightarrow \left| \int_y^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \right| < \varepsilon.$$

En particulier,si $y = A$, comme l'intégrale est positive:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists A \ , \ \int_A^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \varepsilon}$$

b)Prenons $n_0 \in N^*$ tel que $A < n_0$ de façon à avoir $\varphi_n(t) = f(t) - f_n(t)$ pour tout $t \in [0, A]$

On a alors

$$\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt = \int_0^A t^{x-1}\varphi_n(t)dt$$

Mais on sait que sur $[0, n]$ le maximum de φ_n est $\varphi_n(\alpha_n)$ et donc

$$\left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt \right| \leq \varphi_n(\alpha_n) \int_0^A t^{x-1}dt.$$

c)D'après **I.1.e)** $\varphi_n(\alpha_n) \leq \dfrac{1}{ne}$, donc $\left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt \right| \leq \dfrac{1}{ne} \int_0^A t^{x-1}dt$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

$$\exists n_1 \geq n_0 \ , \ \forall n \geq n_1, \left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

d)Soit $\varepsilon > 0$. Définissons A et n_1 comme aux questions précédentes.

Nous avons $I_n(x) = \int_0^n (1 - \dfrac{t}{n})^n t^{x-1}dt$ et $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$, d'où, pour $n \geq n_1$ (et donc aussi $n \geq n_0$ et $n \geq A$)

$$|\Gamma(x) - I_n(x)| = \left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt + \int_A^\infty e^{-t}t^{x-1}dt - \int_A^n t^{x-1}f_n(t)dt \right|$$

Or

$$\left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

$$\int_A^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \int_A^n t^{x-1}f_n(t)dt &\leq \int_A^n e^{-t}t^{x-1}dt \text{ car } \phi_n > 0 \text{ donc } f_n(t) < e^{-t} \\ &\leq \int_A^n e^{-t}t^{x-1}dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$

on a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_1 \ , \ n \geq n_1 \Longrightarrow |\Gamma(x) - I_n(x)| \leq 3\varepsilon$$

Ceci montre que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)}$$

.

Remarque : On démontre sur cet exemple que la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite.

e)Pour $x > 0$ la question **I.3.b** donne que $I_n(x) = n^x \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$ et donc $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^x \dfrac{n!}{(x+n)(x+n-1)...x} \right)$

sur $]-1,0[$, $\Gamma(x)=\dfrac{1}{x}\Gamma(x+1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}n^{x+1}\dfrac{n!}{(x+n+1)(x+n)...(x+1)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{x+n+1}.n^x\dfrac{n!}{(x+n)...(x+1)x}\right)=$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{x+n+1}\right)\lim\left(n^x\dfrac{n!}{(x+n)...(x+1)x}\right)=\lim\left(n^x\dfrac{n!}{(x+n)...(x+1)x}\right)$

le même calcul montre que si la formule est vrai sur $]-p,-p+1[$ elle est vrai sur $]-p-1,-p[$. donc par récurrence sur p :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ ,\ \Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^x\frac{n!}{(x+n)(x+n-1)...x}\right)}$$

3. Equation de Bessel

1. **a)**a est une série entière de rayon R, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et sa dérivée est la série des termes dérivés, de même rayon de convergence. Donc :

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)x^n,\quad a'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(\lambda)x^{n-1}\quad\text{et}\quad a''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(\lambda)x^{n-2}$$

$\lambda>0$ donc $x^\lambda=e^{\lambda\ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,R[$.

Par suite, y est bien deux fois dérivable sur $]0,R[$, et :

$$y'(x)=\lambda x^{\lambda-1}a(x)+x^\lambda a'(x)\qquad\text{et}\qquad y''(x)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}a(x)+2\lambda x^{\lambda-1}a'(x)+x^\lambda a''(x).$$

y solution de $(\mathcal{E})$ donne alors, pour tout $x>0$,

$$0=x^{\lambda+2}a(x)+(2\lambda+1)x^{\lambda+1}a'(x)+x^{\lambda+2}a''(x),$$

d'où

$$x^\lambda\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(\lambda)x^{n+2}\right)+(2\lambda+1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n(\lambda)x^n\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n(\lambda)x^n\right)\right]=0$$

or :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(\lambda)x^{n+2}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}(\lambda)x^n$$

$$0=x^\lambda\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ (a_{n-2}(\lambda)+(2\lambda n+n^2)a_n(\lambda))x^n\right)-(2\lambda+1)a_1(\lambda)x\right].$$

et donc par simplification par $x^\lambda>0$ et identification des coefficients de la série entière pour $n\geq 2$:

$$a_{n-2}(\lambda)+(2\lambda n+n^2)a_n(\lambda)=0$$

$\lambda>0$ et $n>0$ donc $2\lambda n+n^2\neq 0$ et donc :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ a_n(\lambda)=-\frac{a_{n-2}(\lambda)}{n(2\lambda+n)}}$$

.

b)pour $n=1$ on a $(2\lambda+1)a_1(\lambda)=0$ et donc comme $\lambda>0$ $\boxed{a_1(\lambda)=0}$.

c)$a_0(\lambda)$ peut prendre toutes les valeurs réelles possibles. (du moins si on ne fixe pas la valeurs d'un autre coefficient de la série)

La relation précédente et la relation $a_1(\lambda)=0$ montre par récurrence que $a_{2p+1}(\lambda)=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Donc $a(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)x^n=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p}(\lambda)x^{2p}$. Nous pouvons en déduire que <u>cette somme est paire.</u>

On peut aussi en déduire que toute solution sera obtenu à partir de la solution particulière $a_0=1$ par multiplication par a_0 : si il existe une solution non nulle développable en série entière , l'ensemble des solutions développables en série entière est un espace vectoriel de dimension 1.

d)On utilise la règle de D'Alembert

$$\left|\frac{a_{2(p+1)}(\lambda)x^{2p+2}}{a_{2p}(\lambda)x^{2p}}\right| = \frac{|x^2|}{(2p)(2\lambda+2p)}$$

Cette quantité à une limite nulle pour tout x . Donc la série converge pour tout x .

$$\boxed{R=+\infty}$$

Il en résulte que y définie au **III.1)** est bien définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Les calculs du **III.1a)** étant des équivalences on vérifie que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

e) Montrons, par récurrence sur $p\in N$ que pour tout $p\in N$, $a_{2p}(\lambda)=\dfrac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\,p!\,\Gamma(\lambda+p+1)}$.

$\underline{p=0}$: c'est l'hypothèse que nous venons de faire.

$\underline{\text{Soit } p\in\mathbb{N}^*}$ et supposons la propriété vraie jusqu'à $p-1$: nous avons alors

$$a_{2p}(\lambda) = -\frac{a_{2p-2}(\lambda)}{4p(\lambda+p)} = -\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2(p-1)+\lambda}\,(p-1)!\,\Gamma(\lambda+p)}\times\frac{1}{4p(\lambda+p)} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\,p!\,(\lambda+p)\,\Gamma(\lambda+p)} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\,p!\,\Gamma(\lambda+p+1)}$$

en utilisant **II.3)** pour la dernière égalité.

la propriété est vraie au rang $p+1$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}, a_{2p}(\lambda)=\frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\,p!\,\Gamma(\lambda+p+1)}}$$

f)On a en remontant les calculs précédents

$$\left|\frac{a_{2(p+1)}(-\lambda)x^{2p+2}}{a_{2p}(-\lambda)x^{2p}}\right| = \frac{|x^2|}{(2p)(-2\lambda+2p)} \longrightarrow_{p->+\infty} 0$$

ce qui assure que $\sum a_n(-\lambda)x^n$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc que $J_{-\lambda}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc par dérivation termes à termes :

$$J_{-\lambda}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\,p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)}\times x^{2p-\lambda} \quad ; \quad {J_{-\lambda}}'(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\,(2p-\lambda)}{2^{2p-\lambda}\,p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)}\times x^{2p-\lambda-1}$$

$$\text{et}\quad {J_{-\lambda}}''(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\,(2p-\lambda)(2p-\lambda-1)}{2^{2p-\lambda}\,p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)}\times x^{2p-\lambda-2}.$$

λ n'étant pas entier , il faut justifier la dérivation termes à termes : Soit $\phi_p(x)=\dfrac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\,p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)}\times x^{2p-\lambda}$.

- On sait déjà que la série $\sum\phi_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ par produit par $x^{-\lambda}$ d'une série convergente.
- ϕ_p est bien C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $\sum\phi'_p$ converge simplement par la règle de D'Alembert (pour $x\neq 0$)

$$\left|\frac{\phi'_{p+1}(x)}{\phi'_p(x)}\right| = \frac{|x^2|}{(2p)(-2\lambda+2p)}.\frac{2p+2-\lambda}{2p-\lambda} \longrightarrow_{p->+\infty} 0$$

- $\sum\phi"_p$ converge normalement sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$: on a pour $p\geq\dfrac{\lambda+1}{2}$

$$\forall x\in[a,b] : |\ \phi"_p(x)| \leq \frac{(2p-\lambda)(2p-\lambda-1)}{2^{2p-\lambda}\,p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)}b^{p-\lambda-2}$$

  et la règle de D'Alembert montre que la série majorante converge .

Un calcul simple montre alors que

$$\begin{aligned}
& x^2 J_{-\lambda}''(x) + xJ_{-\lambda}'(x) + (x^2-\lambda^2)J_{-\lambda}(x) \\
= & \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\, (2p-\lambda)(2p-\lambda-1) + (2p-\lambda) - \lambda^2 \right] \frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\, p!\, \Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p-\lambda} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\, p!\, \Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p+2-\lambda} \\
= & \sum_{p=0}^{+\infty} [\, 4p(p-\lambda)] \frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\, p!\, \Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p-\lambda} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p-4-\lambda}\, (p-1)!\, \Gamma(-\lambda+p)} \times x^{2p-\lambda} = 0
\end{aligned}$$

(toujours grâce à la relation $(p-\lambda)\Gamma(-\lambda+p) = \Gamma(-\lambda+p+1)$) donc

$$\boxed{J_{-\lambda} \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[}$$

.

g)Nous avons comme $\dfrac{1}{2^{2p+\lambda}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lambda} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$:

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\, \Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

h)Si on suppose que $(J_\lambda,\, J_{-\lambda})$ est une base de l'espace des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$, alors la forme générale des solutions est :

$\forall x > 0$, $\boxed{f(x) = \alpha J_\lambda(x) + \beta J_{-\lambda}(x)}$,

avec α et β des constantes réelles.

Remarque : nous savons par le cours que cet espace est un espace de dimension 2. Par suite, comme J_λ et $J_{-\lambda}$ appartiennent à cet espace, il suffit de montrer que le Wronskien est non nul pour montrer que c'est une base de l'espace des solutions. C'est ce point qui n'est pas évident et que l'on admet ici.

2. **a)** u est C^2 par produit de fonction C^2 $sur]0,+\infty[$ et

$$y(x) = x^{-1/2}u(x)\ ,\ y'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}u(x) + x^{-1/2}u'(x)\ ,\ y"(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x) - x^{-3/2}u'(x) + x^{-1/2}u"(x)$$

et donc

$$\begin{aligned}
& x^2 y"(x) + xy'(x) + (x^2-\lambda^2)y(x) \\
= & \left(\frac{3}{4}x^{-1/2}u(x) - x^{1/2}u'(x) + x^{3/2}u"(x)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^{-1/2}u(x) + x^{1/2}u'(x)\right) + x^{3/2}u(x) - \lambda^2 x^{-1/2}u(x) \\
= & \left(x^{3/2} + \frac{1}{4}x^{-1/2} - \lambda^2 x^{-1/2}\right) u(x) + x^{3/2}u"(x)
\end{aligned}$$

Par suite, u est solution de l'équation proposée si on a $\boxed{\sigma = \dfrac{1}{4} - \lambda^2}$.

b) Dans le cas où $\lambda = \dfrac{1}{2}$, ce qui précède montre que u est solution de l'équation différentielle $u''(x) + u(x) = 0$. Donc $\exists A, B \in \mathbb{R}$ telles que $u(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, $\forall x > 0$.

Par suite, nous avons

$\forall x > 0$, $\boxed{y(x) = A\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + B\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}$.