E3A PC 2004

Il y a plusieurs petites erreurs dans le sujet. La plus gênante est à la fin de la partie 2 . Il faut comparer le noyau de λ_n et l'image de Δ_{n-1} et pas de Δ_n .

Préliminaires

Calcul classique pour une intégrale de Wallis

1. On intègre par partie avec les fonctions C^1 sur $[-\pi/2, \pi/2]$ $u->-\cos(u)$ et $u->(\sin u)^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)(\sin u)^{i-1}du \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(-\cos u)\,.(\sin u)^{i-1}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-\cos u)\left((i-1)(\sin u)^{i-2}\cos u\right)du \\
&= 0 + (i-1)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)^{i-2}\left(1-(\sin u)^2\right)du = (i-1)(\alpha_{i-2}-\alpha_i)
\end{aligned}$$

D'où : $\alpha_i = \dfrac{i-1}{i}\alpha_{i-2}$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}\ ,\ \alpha_{i+2} = \frac{i+1}{i+2}\alpha_i}$$

2. On initialise $\alpha_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du = 1$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)\,du = 0$.

Et donc par récurrence

$$\boxed{\alpha_i = \begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ 1 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(i-1)\cdots 1}{i(i-2)\cdots 2} \text{ si } i \in 2\mathbb{N}^* \end{array}}$$

Partie 1 (étude générale)

1. C'est le théorème de Cauchy Lipschitz :

énoncé : Si on a une équation différentielle $y' = \alpha(x)y + \beta(x)$, linéaire du premier ordre et si les deux fonctions α et β sont continues sur un intervalle I alors pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ il existe une unique solution sur I de l'équation vérifiant la condition initiale donnée $y(x_0) = y_0$

Sur $]-1,1[$ $\left(1-x^2\right)$ est toujours non nulle donc l'équation équivaut à

$$y' = \frac{x}{1-x^2}y + \frac{f(x)}{1-x^2}$$

On a une équation différentielle linéaire d'ordre 1 telle que les deux fonctions $x->\dfrac{x}{1-x^2}$ et $x->\dfrac{f(x)}{1-x^2}$ soient continue sur I . Il existe donc une unique solution vérifiant une condition initiale $y(0) = y_0$ donnée.

2. On montre par récurrence sur n que $\phi \in C^n(I, \mathbb{R})$

- si $n = 0$, ϕ est dérivable donc continue sur I
- si $n = 1$ $\phi'(x) = \dfrac{x}{1-x^2}\phi(x) + \dfrac{f(x)}{1-x^2}$ est continue (somme quotient à dénominateur non nul , produit de fonctions continues) donc ϕ est C^1 sur I
- Si on suppose ϕ C^n sur I , le même raisonnement montre que ϕ est C^{n+1} sur I

$$\boxed{\phi \in C^\infty(I, \mathbb{R})}$$

3.

(a) solutions de l'équation homogène :

$$\forall x \in I : y(x) = K\exp\left(\int\frac{xdx}{1-x^2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) variation de la constante . On cherche les solutions du type $y(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, avec $K \in C^1(I,\mathbb{R})$. On obtient $K'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et donc $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et donc

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(K + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)$$

la condition initiale $y(0) = y_0$ impose

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)}$$

(c) Dans le cas particulier $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(x)$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 + \arcsin(x)\right)}$$

Partie II (solutions polynômiales)

1. Soit $P(x) = a_n x^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré n $(a_n \neq 0)$. le terme de plus haut degré de $\Delta(P)$ est à priori de degré $n+1$ et le coefficient de X^{n+1} est
$$-na_n - a_n = -(n+1)a_n \neq 0$$
Donc si $d^\circ(P) = n \geq 0$ alors $d^\circ(\Delta(P)) = n+1$ (et si $d^\circ(P) = -\infty$ alors $d^\circ(\Delta(P)) = -\infty$)
2. On en déduit que Δ est une application de $R_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$. On vérifie sans problème la linéarité
$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}\left(R_m[X], \mathbb{R}_{m+1}[X]\right)}$$
3. D'après la relation sur les degrés on a si $P \neq 0$, $d^\circ(\Delta(P)) = d^\circ(P) + 1 \geq 0$ et donc $\Delta(P) \neq 0$. Le noyau est réduit à $\{0\}$
$$\boxed{\Delta \text{ est injective}}$$
4. Comme on est en dimension finie le théorème du rang donne :
$$rg(\Delta) = \dim\left(R_m[X]\right) - 0 = m+1 < m+2$$
On en déduit que l'image de Δ est strictement incluse dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$ et même que c'est un hyperplan de cette espace.
5. On a pour $k \geq 1$: $\Delta(X^k) = \left(1-X^2\right).(kX^{k-1}) - X.X^k = (-k-1)X^{k+1} + kX^{k-1}$ et $\Delta(1) = -X$
$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & m \\ 0 & \cdots & 0 & -m-1 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Si $x -> P(x)$ est solution de $(\mathcal{E}_f)$ on a par définition de Δ : $f = \Delta(P)$
7. **(a)** P est de degré au plus $n-1$ donc $\Delta(P) = \Delta_{n-1}(P)$ et donc en prenant la traduction matricielle (qui est une équivalence) $A_{n-1}U = V$

   (b) n n'existe pas dans (i) mais existe dans (ii) et (iii) il y a donc un problème . On peut se douter que c'est "$\exists n \in \mathbb{N}$" qui manque.

   (ii) : $\exists n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $Q = \Delta_{n-1}(P)$

   (iii) : il existe n entier tel que le système $A_{n-1}S = U$ admette une solution dans $\mathbb{R}^n$

   On a alors:

- Si (i) est vérifié , il existe un polynôme P solution . On peut poser $n = d^\circ(P) + 1$ (ou $n = 0$ si $P = 0$). On a alors $Q = \Delta(P) = \Delta_{n-1}(P)$
- Si (ii) est vérifié , P est une solution polynômiale de $(\mathcal{E}_Q)$
- (ii) et (iii) sont équivalentes par traduction matricielle d'une équation linéaire.

(c) Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_à \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

(ii) Soit

$$\begin{cases} s_1 = q_0 \\ -s_0 + 2s_2 = q_1 \\ -2s_1 + 3s_3 = q_2 \\ -3s_2 = q_3 \\ -4s_3 = q_4 \end{cases}$$

On change l'ordre des équations :

$$\begin{cases} -s_0 + 2s_2 = q_1 \\ s_1 = q_0 \\ -3s_2 = q_3 \\ -4s_3 = q_4 \\ -2s_1 + 3s_3 = q_2 \end{cases}$$

On fait $2L_2 + 3/4L_4 + L5- > L5$

$$\begin{cases} -s_0 + 2s_2 = q_1 \\ s_1 = q_0 \\ -3s_2 = q_3 \\ -4s_3 = q_4 \\ 0 = q_2 + 2q_0 + \dfrac{3}{4}q_4 \end{cases}$$

Les 4 premières équations donnent un système triangulaire de diagonale $(-1, 1, -3, -4)$ donc de Cramer. Le système est compatible si et seulement si la dernière relation est vérifiée . soit $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$.

(iii) Le système triangulaire donne alors :

$$s_0 = -\frac{2}{3}q_3 - q_1, s_1 = q_0, s_2 = -\frac{1}{3}q_3, s_3 = -\frac{1}{4}q_4$$

Soit :

$$\boxed{P = -\frac{1}{4}q_4X^3 - \frac{1}{3}q_3X^2 + q_0X - \left(\frac{2}{3}q_3 + q_1\right)}$$

(iv) la relation est la CNS de compatibilité du système , c'est donc une équation de l'image.

(**d**)

(i) λ_n est linéaire à valeurs réelles , donc c'est une forme linéaire est $\lambda_n(1) = \pi$, donc c'est une forme linéaire non nulle.

(ii) On part d'un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est donc Δ_{n-1} qui est défini plutôt que Δ_n .

$$\lambda_n(\Delta_{n-1}(P)) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(1 - (\sin u)^2\right) P'(\sin u) - \sin u P(\sin u)\right] du$$

Une intégration par partie avec les fonctions C^1 $P(\sin u)$ et $-\cos u$ donne :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(u)P(\sin u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)P'(\sin u)du$$

et donc

$$\boxed{\lambda_n\left(\Delta_{n-1}(P)\right) = 0}$$

(iii) On en déduit que $\mathrm{Im}(\Delta_{n-1}) \subset \mathrm{Ker}\,(\phi_n)$. Mais les deux sous espaces sont des hyperplans de $\mathbb{R}_n[X]$, donc l'inclusion implique l'égalité.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(\Delta_{n-1}) = \mathrm{Ker}\,(\lambda_n)}$$

remarque : le sujet comporte une erreur : l'image de Δ_n est dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et contient des polynômes de degré $n+1$. Alors que le noyau de λ_n est dans $\mathbb{R}_n[X]$

(iv) Si $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ on a $\lambda_n(P) = \sum_{k=0}^{n} p_k \pi \alpha_k$. En divisant par π :

$$\boxed{\text{une équation de } \mathrm{Im}\,(\Delta_{n-1}) \text{ est } \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k = 0}$$

(e) D'après **7(b)** $(\mathcal{E}_Q)$ admet une solution polynômiale si et seulement si il existe n tel que $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_{n-1})$ et donc si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k q_k = 0$

(f) pour $n = 4$, $\alpha_0 = 1, \alpha_2 = 1/2, \alpha_4 = 3/8$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ donc une équation est $q_0 + \dfrac{q_é}{2} + \dfrac{3q_4}{8} = 0$ qui équivaut à celle de **7(c)**

Partie 3 (solutions développables en séries entières)

1. **(a)**On sait que toutes les solutions sont du type : $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(y_0 + \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right)$.

On a aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1-t^2)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}(-t^2)^k$ développable en série entière avec $R \geq 1$

- $f(t)$ est développable en série entière avec $R_0 \geq 1$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \left(1-t^2\right)^{-1/2}$ est développable en série entière avec $R = 1$ (car $-1/2 \notin \mathbb{N}$)
- Par produit de fonctions développables en série entière, $\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est développable en série entière avec $R' \geq \min(R_0, 1) \geq 1$
- Par primitivation d'une fonction développable en série entière $x->\displaystyle\int_0^x \dfrac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est développable en série entière avec $R" = R' \geq 1$
- On ajoute une constante , on fait un produit de fonctions développables en série entière avec des rayons ≥ 1

$$\boxed{\text{toute solution est développable en série entière sur } \boxed{]-1,1[}}$$

(b) on a :

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y' - xy &= (1-x^2)\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x_{k-1} - x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1}
\end{aligned}$$

On ajoute le terme nul pour $k = 0$ dans la deuxième somme , on isole le premier terme puis change d'indice dans la première :

$$(1-x^2)y' - xy = a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2)a_{k+2} - (k+1)a_k\right] x^{k+1}$$

et donc par unicité du développement en série entière : pour $k \geq 0$: $(k+2)a_{k+2} - (k+1)a_k = b_{k+1}$ Soit :

$$\boxed{\forall k \geq 1, (k+1)\,a_{k+1} - k a_{k-1} = b_k}$$

et on a $a_1 = b_0$ avec le terme de degré 0.

(ii) On a donc comme $\alpha_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}\alpha_{2k-2}$

$$\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}} = \frac{\frac{2k-1}{2k}a_{2k-2} + \frac{b_{2k-1}}{2k}}{\frac{2k-1}{2k}\alpha_{2k-2}} = \frac{a_{2k-2}}{\alpha_{2k-2}} + \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\,\alpha_{2k-2}}$$

(iii) Ce qui donne en ajoutant les égalités et en simplifiant les termes communs

$$\frac{a_2p}{\alpha_{2p}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2k-2}} + \frac{a_0}{\alpha_0}$$

soit

$$\boxed{a_{2p} = \alpha_{2p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2k-2}}\right)}$$

et avec la condition initiale $a_0 = y_0$ (mais ce n'est pas demandé ici)

(iv) de même

$$\begin{aligned}(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k} &= (2k+1)\left\{\frac{2k}{2k+1}a_{2k-1} + \frac{b_{2k}}{2k+1}\right\}\left\{\frac{2k-1}{2k}\alpha_{2k-2}\right\}\\ &= (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2k-2} + b_{2k}\alpha_{2k}\end{aligned}$$

(v) donc

$$(2p+1)a_{2p+1}\alpha_{2p} = \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k} + a_1\alpha_0$$

mais on a vu que $a_1 = b_0$ et donc

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p}}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k} + b_0\alpha_0\right)}$$

qui peut se regrouper pour donner une $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}$

2. Dans toute cette partie les bornes de l'intégrale sont dans le mauvais sens.

(a) Le problème est l'intégrabilité de $t -> \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $[x,1[$: .La fonction est bien continue sur $[x,1[$ car $|x|<1$. De plus :

- On a $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t} \sim_1 \sqrt{2}\sqrt{1-t}$
- $f(t)$ est développable en série entière avec $R>1$ donc est continue en 1.
- et donc $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \begin{cases} \sim_1 \dfrac{f(1)}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} & \text{si } f(1)\neq 0 \\ << \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} & \text{si } f(1)=0 \end{cases}$

  Ce qui assure l'intégrabilité de la fonction.

(b) $\phi(x) = \left(\displaystyle\int_1^0 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. C'est donc l'unique solution de l'équation différentielle avec $y_0 = \displaystyle\int_1^0 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

(c) **(i)**Le changement de variable $u = \arccos(t)$ est C^1 bijectif de $[x,1[$ sur $]0,\theta]$ et donc :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^\theta \frac{f(\cos(u))}{\sqrt{1-\cos(u)^2}}\,(-\sin u)\,du$$

comme $u \in)0,\pi[$ on a $\sin u \geq 0$ donc $\sqrt{(\sin u)^2} = \sin(u)$. de même $\sqrt{1-\cos(x)^2} = \sin\theta$

$$\phi(x) = \frac{-1}{\sin\theta}\int_0^\theta f(\cos u)du$$

(ii) F est la primitive d'une fonction continue sur $]-\pi,\pi[$ (car f est développable en série entière donc continue sur $]-1,1[$) et donc F est C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et $F'(\theta)=f(\cos\theta)$

théorème: si une fonction A est continue sur un intervalle J elle y admet des primitives et pour tout $a_0 \in J$ $A(x)=\int_{a_0}^{x} A(t)dt$ est une primitive de A .

(iii) quand x tend vers $1, \theta$ tend vers 0 et donc $\sin\theta \sim \theta$ et donc

$$\phi(x) \sim_{x->1} -\frac{F(\theta)}{\theta} = -\frac{F(\theta)-F(0)}{\theta-0} \text{ de limite } -F'(0)=-f(1)$$

$$\boxed{\lim_{x->1^-}(\phi(x))=-f(1)}$$

(d) Les intégrales proposées convergent d'après la question précédente avec $f=t^k$

(i)

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin(x)-\pi/2)$$

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=1$$

(ii) on fait une intégration par partie sur $[x,y]$ et on fait tendre y vers 1 .

$$\begin{aligned}
\int_y^x t^k\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \int_y^x t^{k-1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \left[t^{k-1}(-\sqrt{1-t^2}\right]_y^x - \int_y^x \left((k-1)t^{k-2}\right)\left(-\sqrt{1-t^2}\right)dt \\
&= \left[t^{k-1}(-\sqrt{1-t^2}\right]_y^x + (k-1)\int_y^x \frac{t^{k-2}(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt
\end{aligned}$$

On peut passer à la limite : toutes les intégrales convergent car du type $\phi_k(x)\sqrt{1-x^2}$

$$\int_1^x \frac{t^k dt}{\sqrt{1-t^2}}=-x^{k-1}\sqrt{1-x^2}+(k-1)\left(\int_1^x \frac{t^{k-2}dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int_1^x \frac{t^k dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

soit

$$\phi_k(x)=-x^{k-1}+(k-1)\left(\phi_{k-2}(x)-\phi_k(x)\right)$$

et donc :

$$\boxed{\phi_k(x)=-\frac{x^{k-1}}{k}+\frac{k-1}{k}\phi_{-2}(x)}$$

(iii) Par récurrence sur p :

- si $p=0$, $\phi_1(x)=1$ est un polynôme de degré $1-1$.
- si pour $p\geq 1$, ϕ_{2p-1} est un polynôme de degré $2p-2$, $\phi_{2p}(x)$ est la somme de deux polynômes de degrés différents . Son degré est le max des degrés donc $2p$.

(iv) Encore un petit problème du sujet. A moins de prendre le degré du polynôme nul égal à -1 la proposition n'a pas de sens si $p=0$.

- si $p=0$, $\phi_0(x)=0+1.\phi_0(x)$
- si $p=1$ $\phi_2(x)=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\phi_0(x)$, et on a bien $\alpha_2=\frac{1}{2}$ et $d°(-\frac{x}{2})=2-1$
- si pour $p\geq 1$, $\phi_{2p}(x)=P_{2p}(x)+\alpha_{2p}\phi_0(x)$ on a $\phi_{2p+2}(x)=-\frac{x^{2p+1}}{2p+2}+\frac{2p+1}{2p+2}P_{2p}(x)+\frac{2p+1}{2p+2}\alpha_{2p}\phi_0(x)$.
  et on a bien $d°\left(-\frac{X^{2p+1}}{2p+2}+\frac{2p+1}{2p+2}P_{2p}\right)=2p+1$ (toujours des degrés différents) et $\frac{2p+1}{2p+2}\alpha_{2p}=\alpha_{2p+2}$

(v) d'après la question **2.c** avec $f(t) = t^k$, la fonction $\phi_k(x)$ admet une limite en 1 qui vaut -1 .

La question précédente permet aussi de conclure en disant que tout polynôme est continue en 1 et en vérifiant que ϕ_0 y admet une limite.

(e) Si on peut intégrer termes à termes on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\phi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_1^x \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{aligned}$$

vérifions le théorème d'intégration pour une intégrale impropre :

- les fonctions $t-> \dfrac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ sont continues intégrables sur $[x,1[$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ converge simplement vers $\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ continue sur $[x,1[$
- $\left|\dfrac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \dfrac{|b_k|}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc $\displaystyle\int_1^x \left|\frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| dt \leq \int_x^1 \frac{|b_k|}{\sqrt{1-t^2}}dt = |b_k|\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (cette intégrale converge bien)

  Or f est développable en série entière avec $R = 1$ ce qui assure la convergence absolue de $\sum b_k x^k$ pour $x = 1$ et donc par majoration la convergence de la série $\displaystyle\sum \int_1^x \left|\frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| dt$

  on peut intégrer termes à termes.