❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

Le problème porte sur l'étude de transformations géométriques de l'espace qui caractérisent en mécanique la déformation d'un matériau. Aucune connaissance de physique ou de mécanique n'est évidemment nécessaire à sa résolution.

Dans tout ce problème, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique B_c étant notée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et le repère cartésien associé est (O, B_c).
Une matrice (n,p) est une matrice à n lignes et p colonnes.

Notations :
Le produit scalaire de deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.
I_3 est la matrice identité (3,3).
Les endomorphismes ou les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ seront notés en lettres minuscules et les matrices associées dans la base canonique seront notées de la même lettre majuscule.
Par exemple, si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, F est la matrice de f dans la base B_c; si $\vec{u}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, U est sa matrice dans la base canonique B_c.
En particulier $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

Soit α un réel non nul. On définit deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ f et g par leurs matrices

$$F = I_3 + 2\,\alpha\, E_1\,{}^tE_2 \quad \text{et} \quad G = {}^tF.$$

1. Montrer que la droite vectorielle de base $(\vec{e_3})$ et le plan de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ sont stables par$f$.

2. Vérifier que les valeurs propres $\{\mu_i\}_{1\leq i\leq 3}$ de $g \circ f$ sont strictement positives et peuvent être numérotées de telle sorte que $\mu_1 > \mu_2$ et $\mu_1\mu_2 = \mu_3$.

3. Soient a et b deux réels ; on définit les vecteurs $\vec{u_1} = a\,\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\,\vec{e_1} + \vec{e_2}$.

   (a) Donner les relations que doivent vérifier a et b pour que $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$. En déduire le polynôme unitaire de degré 2 dont a et b sont les racines.

   (b) On pose $\vec{u_3} = \vec{e_3}$. Déterminer a et b de telle sorte que $B = (\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ et $(f(\vec{u_i}))_{1\leq i\leq 3}$ soient des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$, B étant de plus une base directe.

4. Vérifier que B est une base de vecteurs propres de $g \circ f$ et préciser la valeur propre associée à chacun des vecteurs.

5. Soit r_θ la rotation d'axe orienté par $\vec{e_3}$ et d'angle de mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Montrer qu'il existe une unique valeur de θ tel que $s = r_\theta^{-1} \circ f$ soit un endomorphisme symétrique de valeurs propres strictement positives et préciser cette valeur en fonction de $\arctan(\alpha)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on pose $\alpha = 1$.
Soient $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de points définies par m_0, $\vec{Op_0} = f(\vec{Om_0})$ et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{Om_{n+1}} = g(\vec{Op_n})$ et $\vec{Op_{n+1}} = f(\vec{Om_{n+1}})$.
On pose enfin :

$$\vec{Om_n} = x_n\vec{e_1} + y_n\vec{e_2} + z_n\vec{e_3}$$

$$\vec{Op_n} = \tilde{x}_n\vec{e_1} + \tilde{y}_n\vec{e_2} + \tilde{z}_n\vec{e_3}$$

1. (a) Etudier les suites $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\tilde{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (b) Montrer que $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

2. On suppose que $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite m.

   (a) Montrer que $\vec{Om}$ est un vecteur invariant par $g \circ f$.

   (b) En déduire une définition géométrique de m.

3. Soit Q la matrice de passage de B_c à B (base définie en première partie question 3b). On définit la matrice (3,1) M'_n par

$$M'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

   (a) Que représente M'_n ?

   (b) Sans écrire la matrice Q, donner la relation de récurrence liant M'_{n+1} et M'_n. Exprimer alors (x'_n, y'_n, z'_n) en fonction de (x'_0, y'_0, z'_0) et n.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M'_0 pour que la suite $(M'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit convergente.

4. (a) Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si m_0 appartient à un plan (Π) dont on donnera une équation cartésienne dans le repère (O, B_c).

   (b) On suppose que m_0 appartient au plan (Π) sans appartenir à la droite passant par O de base $(\vec{e_3})$. Montrer que les points $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont alignés sur une droite (Δ) et les points $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur une droite (Δ').

   (c) Soit m_0 un point du plan (Π) autre que O et vérifiant $z_0 = 0$. Donner une construction géométrique des points $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à partir de m_0 et des droites (Δ) et (Δ'). On tracera une figure pour expliciter cette construction.

Troisième partie

On se propose de généraliser les résultats de la première partie au cas d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de déterminant strictement positif. f étant de matrice F dans B_c, on définit g par sa matrice ${}^tF$.

1. Un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ est dit défini positif si pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$, autre que $\vec{0}$, $\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) > 0$.

   (a) Montrer que si un endomorphisme est défini positif ses valeurs propres réelles sont strictement positives.

   (b) Soit un endomorphisme ϕ symétrique de valeurs propres strictement positives. Montrer que ϕ est défini positif.

   (c) Montrer que $g \circ f$ est symétrique et défini positif.

2. Soit $(\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que si $(\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de vecteurs propres de $g \circ f$, $(f(\vec{u_i}))_{1\leq i\leq 3}$ est aussi une base orthogonale.

   (b) Réciproquement, on suppose que $(\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ et $(f(\vec{u_i}))_{1\leq i\leq 3}$ sont des bases orthogonales; en calculant $\vec{u_i} \cdot g \circ f(\vec{u_j})$ pour $i \neq j$, montrer que $(\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ est une base de vecteurs propres de $g \circ f$.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $B = (\vec{u_i})_{1\leq i\leq 3}$ une base orthonormale de vecteurs propres de $g \circ f$, $\vec{u_i}$ étant associé à la valeur propre μ_i.

   (a) Montrer que
$$^tF\,F = \sum_{i=1}^{3} \mu_i\, U_i\, {}^tU_i$$

   (b) On pose $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ et $S = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, U_i\, {}^tU_i$. Calculer S^2. Montrer que l'endomorphisme s de matrice S est un endomorphisme symétrique, défini positif.

4. (a) Soit $R = FS^{-1}$. Vérifier que R est une matrice orthogonale.

   (b) En déduire que f s'écrit sous la forme $r \circ s$ où r est une rotation et s un endomorphisme symétrique défini positif.

5. On définit des vecteurs $\vec{u_i'}$ pour $1 \leq i \leq 3$ par les relations $f(\vec{u_i}) = \lambda_i \vec{u_i'}$.

   (a) Vérifier que $B' = (\vec{u_i'})_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Soit Q (respectivement Q') la matrice de passage de la base B_c à la base B (respectivement B'). Exprimer R à l'aide de Q et Q'.

6. Montrer que l'image par f d'une sphère centrée en O et de rayon ρ est une quadrique dont on précisera la nature, une base orthonormale où cette quadrique admet une équation réduite (c'est à dire ses axes principaux) et cette équation réduite.