Banque PT 1999 : Mathématiques II-B

1. Première partie

1.1.)

$$E_1{}^tE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G$$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$ donc la droite vectorielle de base $\vec{e_3}$ est stable par f.

$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = 2\alpha\vec{e_1} + \vec{e_2}$, vecteurs qui constituent une famille génératrice de l'image du plan de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, sont des vecteurs de ce plan. Par suite, le plan vectoriel de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est stable par f.

1.2.)

$$GF = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(GF - \lambda I_3) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)\left(4\alpha^2+1-\lambda\right) - 4\alpha^2\right) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2(2\alpha^2+1)\lambda + 1]$$

Le discriminant du polynôme entre crochets est :
$\Delta' = 4\left((2\alpha^2+1)^2 - 1\right) = 16\alpha^2(\alpha^2+1) > 0$
L'ensemble des valeurs propres (réelles) de $g \circ f$ est donc $\{2\alpha^2+1+2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}, 2\alpha^2+1-2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}, 1\}$.
Le produit des 2 valeurs propres qui ne sont pas égales à 1 vaut 1 comme produit des zéros d'un polynôme du second degré, et sont donc de même signe. De même leur somme est strictement positive. Donc les 3 valeurs propres sont strictement positives et on peut donc les numéroter de sorte que $\mu_1 > \mu_2$. De plus $\boxed{\mu_1\mu_2 = 1 = \mu_3.}$

1.3.)

a)

$\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$, donc $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$ si et seulement si $ab+1=0$.
$f(\vec{u_1}) = af(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = (a+2\alpha)\vec{e_1} + \vec{e_2}$
$f(\vec{u_2}) = bf(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = (b+2\alpha)\vec{e_1} + \vec{e_2}$
$f(\vec{u_1})\cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si $ab + 2\alpha(a+b) + 4\alpha^2 + 1 = 0$
Donc $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1})\cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} ab+1 = 0 \\ ab + 2\alpha(a+b) + 4\alpha^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} ab = -1 \\ (a+b) = -2\alpha \end{cases}$$

Donc $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1})\cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si a et b sont racines de l'équation $x^2 + 2\alpha x - 1 = 0$, soit :

$$\boxed{\{a,b\} = \{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}, -\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}\}}$$

b)

Si $\vec{u_3} = \vec{e_3}$, $\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$, alors $\vec{u_3}$ est orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. Pour que $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$soit une base orthogonale, il faut et il suffit d'avoir :

$$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$$

De même $f(\vec{u_i})_{1\le i\le 3}$ est une base orthogonale si et seulement si :

$$f(\vec{u_1})\cdot f(\vec{u_2}) = 0$$

Par suite les deux propriétés sont acquises simultanément si et seulement si a et b prennent les valeurs trouvées dans la question précédente.

Nous avons alors le déterminant des vecteurs de la base B dans la base canonique B_c :

$$\det{}_{B_c}(B) = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - b$$

Donc B sera de sens direct si et seulement si $a > b$, donc si et seulement si

$$\boxed{a = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} \text{ et } b = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

1.4.)

On vérifie que $u_1 = \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}\right) \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ vérifie $g \circ f(u_1) = \left(2\alpha^2 + 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 1}\right) u_1$
$u_2 = \left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}\right) \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ vérifie $g \circ f(u_2) = \left(2\alpha^2 + 1 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 1}\right) u_2$ et $g \circ f(u_3) = u_3$

$$\boxed{(u_i)_{i=1}^{3} \text{ est une base orthogonale de vecteurs propres de } g \circ f}$$

1.5.)

Avec les conventions de l'énoncé :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & 2\alpha\cos\theta + \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -2\alpha\sin\theta + \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S est symétrique si et seulement si $2\alpha\cos\theta + \sin\theta = -\sin\theta$ c'est-à-dire si et seulement si $\sin\theta = -\alpha\cos\theta$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \alpha\cos\theta & 0 \\ \alpha\cos\theta & \left(2\alpha^2 + 1\right)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique associe à s est :

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2(\alpha^2 + 1)\cos\theta\ \lambda + (\alpha^2 + 1)\cos\theta) = 0$$

Etudions l'équation $\lambda^2 - 2(\alpha^2 + 1)\cos\theta\ \lambda + (\alpha^2 + 1)\cos\theta = 0$.
$\Delta' = (\alpha^2 + 1)^2\cos^2\theta - (\alpha^2 + 1)\cos^2\theta = \alpha^2(\alpha^2 + 1)\cos^2\theta > 0$ donc il existe deux racines réelles.
La somme et le produit des valeurs propres autres que 1 ont le signe de $\cos\theta$. Pour qu'elles soient positives, il faut choisir θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, soit :

$$\boxed{\theta\text{=-arctan}(\alpha)}$$

2. Deuxième partie

2.1.)

$\overrightarrow{Op_0} = f(\overrightarrow{Om_0})$, $\overrightarrow{Om_{n+1}} = g(\overrightarrow{Op_n})$ et $\overrightarrow{Op_{n+1}} = f(\overrightarrow{Om_{n+1}})$, avec :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } GF = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit avec une notation matricielle :

$$M_{n+1} = GP_n, P_{n+1} = FM_{n+1}, M_{n+1} = GFM_n$$

.Les calcul de la première partie donnent: $\sqrt{2}$: $\mu_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $\mu_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $\mu_3 = 1$.
$\vec{u_1} = (\sqrt{2} - 1)\vec{e_1} + \vec{e_2}$ est vecteur propre de $g \circ f$ de valeur propre μ_1. $\vec{u_2} = (-\sqrt{2} - 1)\vec{e_1} + \vec{e_2}$ est celui de valeur propre μ_2. $\vec{u_3} = \vec{e_3}$ est celui de valeur propre $\mu_3 = 1$.

a)

les deux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, tous leurs termes sont égaux à z_0.

b)

$P_n = FM_n$ donc pour tout entier $n \geq 0$, $\tilde{y}_n = y_n$.
$M_{n+1} = GP_n$ donc pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = \tilde{x}_n$.
Par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.2.)

a)

Pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = GFM_n$ donc si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M on aura $M = GFM$.Donc $\vec{Om}$ est invariant par $g \circ f$.

b)

. En résolvant le système précédent $M = GFM$, on trouve que M est nécessairement la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{le point } m \text{ est la projection orthogonale de } m_0 \text{ sur } Oz}$$

2.3.)

$$M'_n = Q^{-1} M_n$$

a)

M'_n représente la matrice de $\vec{Om}_n$ dans la base B.

b)

Comme $\vec{Om}_{n+1} = g \circ f(\vec{Om}_n)$,

$$M'_{n+1} = M_B(g \circ f) M'_n$$

c'est-à-dire :

$$M'_{n+1} = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M'_n$$

Par suite $x'_{n+1} = (3+2\sqrt{2})x'_n$, $y'_{n+1} = (3-2\sqrt{2})y'_n$, et $z'_{n+1} = z'_n$, et donc

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} x'_n = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n x'_0 \\ y'_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^n y'_0 \\ z'_n = z'_0 \end{array} \right.}$$

c)

Comme $3+2\sqrt{2} > 1$ et $\left|3-2\sqrt{2}\right| < 1$, pour que $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut et il suffit que $x'_0 = 0$.On a alors $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z'_0)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4.)

a)

La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $x'_0 = 0$ donc si et seulement si m_0 appartient au plan Π engendré par $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$.

Son équation est donc :

$$\begin{vmatrix} x & -\sqrt{2}-1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{x + (\sqrt{2}+1)y = 0}$$

b)

Si m_0 appartient à Π sans appartenir à la droite vectorielle de base $(\vec{e}_3)$, alors $x_0 + (\sqrt{2}+1)y_0 = 0$ sans que $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Alors pour tout entier naturel n, $x'_n = 0$ donc $x_n + (\sqrt{2}+1)y_n = 0$ et $z_n = z_0$. Donc les points m_n appartiennent à la droite (Δ) dont les équations sont :

$$\boxed{(\Delta)\begin{cases} x + (\sqrt{2}+1)y = 0 \\ z = z_0 \end{cases}}$$

Quant aux points p_n, ils appartiennent à la droite $(\Delta') = f(\Delta)$.

c)

Si $z_0 = 0$ tous les points sont dans le plan xOy et m_0 est sur Δ . Or on a vu au II1b que m_n et p_n ont la même ordonnée .p_n est l'intersection de Δ' et de la droite horizontale passant par m_n .De même m_{n+1} est l'intersection de Δ et de la droite verticale passant par p_n

3. Troisième partie

3.1.)

On reconnaît dans g l'adjoint de f . pour les deux premières questions on peut donc utiliser

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 \quad g(x) \cdot y = x \cdot f(y)$$

a)

λ étant une valeur propre de ϕ et $\vec{x}$ étant un vecteur propre de ϕ de valeur propre λ,

$$\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{x}) > 0$$

Comme $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ (car $\vec{x}$ étant un vecteur propre est différent de $\vec{0}$, on a bien $\lambda > 0$).

b)

ϕ étant un endomorphisme symétrique, il possède une base propre orthonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ associée aux valeurs propres réelles $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ supposées ici strictement positives.

$\vec{x}$ étant un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, il existe trois réels x_1, x_2 et x_3 non tous nuls tels que $\vec{x} = x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3$.
Alors

$$\phi(\vec{x}) = \phi(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = \lambda_1 x_1\vec{v}_1 + \lambda_2 x_2\vec{v}_2 + \lambda_3 x_3\vec{v}_3$$

et

$$\vec{x}\cdot\phi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 > 0$$

Donc ϕ est défini positif.

c)

$M_{B_c}(g\circ f) = GF = {}^tFF$.
Alors ${}^t(GF) = {}^tF{}^tG = GF = M_{B_c}(g\circ f)$
Donc $g\circ f$ est un endomorphisme symétrique.
Soit $\vec{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$
et donc

$$\vec{x}\cdot(g\circ f(\vec{x})) = \vec{x}\cdot g\left(f(\vec{x})\right) = f(x)\cdot f(x)$$

Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ et $\det(f)>0$, $f(\vec{x})\neq\vec{0}$ et donc :

$$f(\vec{x})\cdot f(\vec{x}) > 0$$

Finalement,

$$\vec{x}\cdot(g\circ f)(\vec{x}) > 0$$

et donc $\boxed{g\circ f \text{ est un endomorphisme symétrique défini positif.}}$

3.2.)

a)

On désigne respectivement par λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Les réels λ_1, λ_2 et λ_3 sont strictement positifs.
Pour tout couple (i,j) tel que $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq 3$ et $i\neq j$,

$$f(\overrightarrow{u_i})\cdot f(\overrightarrow{u_j}) = \overrightarrow{u_i}\cdot(g\circ f(\overrightarrow{u_j})) = \lambda_j\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j} = 0$$

Donc $(f(\vec{u}_i))_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale.

b)

Pour tout couple (i,j) tel que $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq 3$ et $i\neq j$,

$$\overrightarrow{u_i}\cdot(g\circ f(\overrightarrow{u_j})) = f(\overrightarrow{u_i})\cdot f(\overrightarrow{u_j}) = 0$$

car $(f(\overrightarrow{u_i}))$ est une base orthogonale . Par suite $(g\circ f)(\vec{u}_j)$ est orthogonal aux $\vec{u}_i$ pour $i\neq j$ donc colinéaire à $\vec{u}_j$. Donc $\vec{u}_j$ est un vecteur propre de $g\circ f$ et $(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de vecteurs propres de $g\circ f$.

3.3.)

Comme on a une base de vecteurs propres de $f\circ g$ on va faire des changements de base . Soit P la matrice de passage orthogonale telle que $U_i = PE_i$ avec $D = diag(\mu_i)$. On a donc $GF ={}^t FF = PD{}^tP$
a)
On a donc ${}^tFF = PD{}^tP$ et $U_i\ {}^tU_i = PE_i\ {}^tE_i\ {}^tP$. La question est donc équivalente à $D = \sum_{i=1}^3 \mu_i E_i\ {}^tE_i$. Le calcul est alors immédiat .

b)

Avec le même changement de base : $S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i PE_i\ {}^tE_i\ {}^tP = P\left(\sum \lambda_i E_i\ {}^tE_i\right)^t P = Pdiag(\lambda_i){}^tP$.
Donc $S^2 = Pdiag(\lambda_i^2){}^tP = Pdiag(\mu_i){}^tP ={}^t FF$

$$\boxed{S^2 ={}^t FF}$$

De plus partant de $S = Pdiag(\lambda_i){}^tP$ il est évident que :${}^tS ={}^t\left(Pdiag(\lambda_i)^t\,P\right) ={}^t({}^tP)diag(\lambda_i){}^tP = S$
Donc s est un endomorphisme symétrique.
Soit $\vec{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i\vec{u}_i$.On a vu dans le calcul précédent que (u_i) est une base de vecteurs propres pour s et que $s(u_i) = \lambda_i u_i$. Donc $s(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i\vec{u}_i$.Donc $\vec{x}\cdot s(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i^2 > 0$
Donc $\boxed{s \text{ est un endomorphisme symétrique défini positif.}}$

3.4.)

a)

Toujours en exploitant le changement de base il existe une matrice U tel que $F = PU^tP$. Comme ${}^tFF = Pdiag(\mu_i)^tP$ on a ${}^tUU = diag(\mu_i)$ et comme $S = Pdiag(\lambda_i)^tP$ on a $S^{-1} = Pdiag(\lambda_i^{-1})^tP$. On a alors :

$$ {}^tRR =^t \left(PUS^{-1}\,{}^tP\right)\left(PUS^{-1}\,{}^tP\right) = P^tS^{-1}\,{}^tUUS^{-1}\,{}^tP = Pdiag(\lambda_i^{-1})diag(\mu_i)diag(\lambda_i^{-1})^tP = P^tP = I_3 $$

De plus R est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

$$\boxed{R \text{ est orthogonal}}$$

b)

$F = RS$ est équivalent à $f = r \circ s$.

R étant une matrice orthogonale, r est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

$$\det(r) = \det(R) = \det(F)\det(S^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\det(F) > 0$$

Donc r est une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$, donc une rotation vectorielle.

(On a déjà montré dans la question 3.b de la troisième partie que s était un endomorphisme symétrique défini positif.)

3.5.)

a)

Pour $1 \le i \le 3$,

$$\vec{u'}_i = \frac{f\left(\overrightarrow{u_i}\right)}{\lambda_i} = \frac{r \circ s\left(\overrightarrow{u_i}\right)}{\lambda_i} = r(\overrightarrow{u_i})$$

r étant une isométrie, transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Donc <u>B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$</u>.

b)

On a $Q' = Mat_{B_c}(U_i')$ et $Q = Mat_{B_c}(U_i)$ donc comme $\overrightarrow{u_i'} = r(\overrightarrow{u_i})$,$Q' = RQ$ et comme Q est orthogonale :

$$\boxed{R = Q'^tQ}$$

3.6.)

Comme pour un ellipsoïde d'inertie en physique:

f transforme le vecteur $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ en le vecteur $\vec{y} = y_1\vec{u'}_1 + y_2\vec{u'}_2 + y_3\vec{u'}_3$ tel que $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_2 = \lambda_2 x_2$, $y_3 = \lambda_3 x_3$, donc :

$$x_1 = \frac{y_1}{\lambda_1}, x_2 = \frac{y_2}{\lambda_2}, x_3 = \frac{y_3}{\lambda_3}$$

m tel que $\vec{Om} = \vec{x}$ appartient à la sphère de centre O et de rayon ρ si et seulement si :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$$

donc si et seulement si :

$$\frac{y_1^2}{(\lambda_1\rho)^2} + \frac{y_2^2}{(\lambda_2\rho)^2} + \frac{y_3^2}{(\lambda_3\rho)^2} = 1$$

dans la base B'.

Donc l'image par f d'une sphère centrée en O et de rayon ρ est un ellipsoïde de centre O dont les axes sont portés par les axes de coordonnées du repère (O, B'), les longueurs de demi-axes étant $\lambda_1\rho$, $\lambda_2\rho$ et $\lambda_3\rho$.