Correction

Partie I

1. $G(u,v)=\|u\|^2\|v\|^2-(u\mid v)^2\geq 0$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il y a égalité ssi u et v sont colinéaires.

2.a Si $w\in\{u,v\}^{\perp}$ alors $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & 0\\ (v\mid u) & (v\mid v) & 0\\ 0 & 0 & (w\mid w)\end{vmatrix}=G(u,v)\|w\|^2$.

2.b Si $w=\lambda u+\mu v$ alors en notant C_1,C_2,C_3 les colonnes de $Gram(u,v,w)$ on a $C_3=\lambda C_1+\mu C_2$ donc $G(u,v,w)=0$.

2.c $$G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & (u\mid t)\\ (v\mid u) & (v\mid v) & (v\mid t)\\ (w\mid t) & (w\mid t) & (n\mid n)+(t\mid t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & 0\\ (v\mid u) & (v\mid v) & 0\\ (w\mid t) & (w\mid t) & (n\mid n)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & (u\mid t)\\ (v\mid u) & (v\mid v) & (v\mid t)\\ (w\mid t) & (w\mid t) & (t\mid t)\end{vmatrix}$$
$$=G(u,v)\|n\|^2+G(u,v,t)=G(u,v)\|n\|^2$$

2.d Si (u,v,w) est libre alors (u,v) est libre et $w\notin\text{Vect}(u,v)$ donc $G(u,v)\neq 0$ et $n\neq 0$ puis $G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2\neq 0$.
Si $G(u,v,w)=0$ alors $G(u,v)=0$ ou $n=0$ donc (u,v) liée ou $w\in\text{Vect}(u,v)$ puis (u,v,w) libre.

Partie II

1. Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $Gram(u_1,\dots,u_n)$.
Si $(u_1,\dots,u_n)$ est liée alors $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ telle que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0$ et par suite $\lambda_1C_1+\cdots+\lambda_nC_n=0$ et donc $G(u_1,\dots,u_n)=0$.

2.a $u_j=\sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k$ donc $(u_i\mid u_j)=\left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k\mid \sum_{\ell=1}^n a_{\ell,j}e_\ell\right)=\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$.

2.b $A=(a_{i,j})$, ${}^tA=(a'_{j,i})$ avec $a'_{j,i}=a_{i,j}$. ${}^tAA=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{k=1}^n a'_{i,k}a_{k,j}=\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}=(u_i\mid u_j)$ donc ${}^tAA=Gram(u_1,\dots,u_n)$. $G(u_1,\dots,u_n)=\det{}^tAA=(\det A)^2>0$ car A est inversible.

3.a $\forall y\in F$, $\|x-y\|^2=\|x-x_F+x_F-y\|^2=\|x-x_F\|^2+\|x_F-y\|^2$ car $x-x_F=n\in F^{\perp}$ et $x_F-y\in F$.
Par suite $\|x-y\|^2\geq\|x-x_F\|^2$ et donc $d(x,F)\geq\|x-x_F\|=\|n\|$.
De plus pour $y=x_F\in F$, $\|x-y\|=\|n\|$ donc $d(x,F)\leq\|n\|$ et finalement $d(x,F)=\|n\|$.

3.b En décomposant la dernière colonne :
$$G(e_1,\dots,e_p,x)=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & (e_1\mid x_F)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p\mid e_1) & \cdots & (e_p\mid e_p) & (e_p\mid x_F)\\ (x_F\mid e_1) & \cdots & (x_F\mid e_p) & (x_F\mid x_F)+\|n\|^2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & (e_1\mid x_F)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p\mid e_1) & \cdots & (e_p\mid e_p) & (e_p\mid x_F)\\ (x_F\mid e_1) & \cdots & (x_F\mid e_p) & (x_F\mid x_F)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_p\mid e_1) & \cdots & (e_p\mid e_p) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \|n\|^2\end{vmatrix}$$
$$=G(e_1,\dots,e_p,x_F)+\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)=0+\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)=\|n\|^2G(e_1,\dots,e_p)$$
donc $d(x,F)=\|n\|=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\dots,e_p,x)}{G(e_1,\dots,e_p)}}$.

Partie III

1. φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

$\varphi(P,P)=\int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t\geq 0$ car $P(t)^2\geq 0$ et $0\leq 1$.

Si $\varphi(P,P)=0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive : $\forall t\in[0,1], P(t)^2=0$ puis $P(t)=0$. Ainsi le polynôme P possède une infinité de racines et donc $P=0$.

2.a $d=d\left(X^2,\mathbb{R}_1[X]\right)^2$.

2.b $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2160}$.

3. Via II.3.b : $d=\dfrac{G(1,X,X^2)}{G(1,X)}=\dfrac{1/2160}{1/12}=\dfrac{1}{180}$.

Partie IV

1. $\deg F=-1$ donc la partie entière de F est nulle.

F admet p pôles simples qui sont les $-b_i$. La DES de F est de la forme :

$F(X)=\sum_{j=1}^{p}\dfrac{\lambda_j}{(X+b_j)}$ avec $\lambda_j=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p}\dfrac{a_i+b_j}{b_j-b_i}$.

2. $F(a_1)=\cdots=F(a_{p-1})=0$ donc en développant selon la dernière colonne :

$D=F(a_p)C_{p-1}(a_1,\ldots,a_{p-1},b_1,\ldots,b_{p-1})$.

D'autre part, via $C_p\leftarrow C_p-\left(\lambda_1C_1+\cdots+\lambda_{p-1}C_{p-1}\right)$, $D=\lambda_pC_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)$.

d'où l'égalité proposée.

3. Raisonnons par récurrence sur $p\geq 1$.

Pour $p=1$: $C_1(a_1,b_1)=\dfrac{1}{a_1+b_1}$ ce qui correspond à la formule proposée (sachant qu'un produit sur le vide vaut 1.)

Supposons la propriété établie au rang $p-1\geq 1$.

Au rang p : $C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)=\dfrac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}F(a_p)C_{p-1}(a_1,\ldots,a_{p-1},b_1,\ldots,b_{p-1})$ avec

$F(a_p)=\dfrac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_p-a_i)}{\prod_{i=1}^{p}(a_p+b_i)}$ et par HR : $C_{p-1}(a_1,\ldots,a_{p-1},b_1,\ldots,b_{p-1})=\dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq p-1}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq p-1}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq p-1}(a_i+b_j)}$ donc

$C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)=\dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq p}(a_i+b_j)}$. Récurrence établie.

4.a Pour $a_i = i$ et $b_i = i-1$.

$$\Delta_p = C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) \text{ donc } \Delta_p = \frac{\prod_{1\le i<j\le p}(j-i)^2}{\prod_{1\le i,j\le p}(i+j-1)}.$$

On peut aussi écrire $\Delta_p = \dfrac{\left(1!2!\dots(p-1)!\right)^3}{p!(p+1)!\dots(2p-1)!}$ mais cela n'est pas demandé.

4.b Comme dans la partie III, $u_n = d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \dfrac{G(1,X,\dots,X^n)}{G(1,X,\dots,X^{n-1})} = \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.

Par suite $u_n = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)^2}{\left(\prod_{i=1}^{n}(i+n)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(n+j)\right)(2n+1)} = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

4.c $0 \le u_n \le \dfrac{1\times\cdots\times n}{(n+1)\times\cdots\times(2n)}\dfrac{1\times\cdots\times n}{(n+1)\times\cdots\times(2n)}\dfrac{1}{2n+1} \le \dfrac{1}{2n+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.