D'après le sujet de mathématiques de la banque filière PT
Epreuve A 2007

L'usage de calculatrices est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynômiale associée sur $\mathbb{R}$. Enfin, P' et P" désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1; T_1 = X \ , \forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

PARTIE A

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4 .
2. Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant?
3. Etudier la parité de T_n.
4. Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$
5. Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

6.Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
(a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1, 1]$.
(b) Déterminer toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$
7.Déterminer les racines de T'_n dans $\mathbb{C}$.

PARTIE B

On définit les applications L et N sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X] \ , \quad L(P) = \max_{t\in[-1,1]} (|P(t)|)$$
$$N(P) = \max_{k\in[[0,n]]} (|a_k|)$$

On considère enfin l'application φ de $\mathbb{R}[X]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

1.Montrer que L et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$

2.Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α_n et γ_n tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \alpha_n N(P) \leq L(P) \leq \gamma_n N(P)$$

La suite de cette partie a comme objectif de calculer une valeur possible de α_n et de γ_n .
3.
(a) Montrer que $\gamma_n = n+1$ est un réel tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ L(P) \leq \gamma_n N(P)$$

(b) Donner un exemple de polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n(X]$ non nul tel que :

$$L(Q_n) = (n+1)N(Q_n)$$

4.Calculer $L\left(T_n\right)$.
5.
(a) Montrer que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
(b) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(c) Montrer :

$$\forall \left(P,Q\right) \ , \varphi(P,Q) = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q\left(\cos\left(\theta\right)\right)d\theta$$

6. Soit n et m deux entiers naturels . Calculer $\varphi(T_n, T_m)$
7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+l)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$$

Vérifier alors que pour tout entier $k \in [[0,n]]$ on a :

$$|\alpha_k| \leq 2L(P)$$

8.Dans cette question uniquement, l'entier n est strictement positif. Montrer que :

$$N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1})$$

9.On pose $q = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ N(T_n) \leq q^n$$

10. En déduire que l'on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \frac{1}{q^{n+1}\sqrt{2}}N(P) \leq L(P)$$

11. Etudier si dans $\mathbb{R}[X]$ les normes L et N sont équivalentes.

PARTIE C

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \psi(P) = (X^2-1)P" + XP'$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de ψ dans la base canonique $\left(X^k\right)_{k=0}^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$,puis la matrice de ψ dans la base $(T_k)_{k=0}^n$
3.Déterminer une base du noyau et une base de l'image de ψ.

PARTIE D

On note E_n l'ensemble des polynômes de degré n et de coefficient dominant égal à 1 :

$$E_n = \left\{ P \in \mathbb{R}[X], \exists (a_k)_{k=0}^{n-1} \text{ , } P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right\}$$

1. Déterminer un scalaire λ_n tel que $Q_n = \lambda_n T_n$ soit élément de E_n
2.
(a) calculer $L(Q_n)$
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|Q_n(x)| = L(Q_n)$. On note N le nombre de solutions de l'équation
On note $c_N < c_{n-1} < \cdots < c_1$ la suite des solutions de $|Q_n(x)| = L(Q_n)$ rangées par ordre décroissant.
(c) pour tout $k \in [[1, N]]$ déterminer le signe de $Q_n(c_k)$
3. Soit P un polynôme de E_n vérifiant $L(P) < L(Q_n)$ dont on suppose l'existence.
(a) Pour tout $k \in [[1, N]]$ déterminer le signe de $(P - Q_n)(c_k)$
(b) En déduire une absurdité.
4; calculer $\alpha_n = \inf \{L(P), P \in E_n\}$