Devoir numéro 5 Spé PC2

D'après le sujet de mathématiques de la banque filière PT
Epreuve A 2007

Les polynômes T_n étudiés sont les polynômes de Tchebichev

Partie A

1. On a $T_0 = 1, T_1 = X$, et donc $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$,
$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$
$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$

Remarque : la suite est définie par une récurrence double. Toutes les démonstrations par récurrence seront donc initialisée sur 2 termes et seront doubles (ou fortes)
Degré de $T_n$et coefficient dominant. ;
Posons: H_n: T_n est de degré et le coefficient de X^n est 2^{n-1} si $n \geq 1$

- pour $n = 0$, T_0 est de degré 0 de coefficient dominant 1
- $(H_1), (H_2)$ sont bien vérifiées.
- Supposons H_{k-1} et H_k vérifiées montrons que H_{k+1} est bien vraie:
  T_k est degré k et T_{k-1} de degré $k-1$ donc $2XT_k$ et T_{k-1} sont de degrés <u>différents</u> . Le degré de la somme est donc exactement le maximum des degré soit $k+1$ et le coefficient dominant provient uniquement du terme $2XT_k$, il vaut donc $2.2^{k-1} = 2^k$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } d^\circ(T_n) = n}$$

$$\boxed{\text{le coefficient dominant de } T_n \text{ est est } \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}}$$

3.Posons : H_n : T_n a la parité de n i.e : $\forall x \in \mathbb{R}\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

- H_0, H_1 sont bien vérifiées.
- Supposons H_{k-1} et H_k vérifiées montrons que H_{k+1} est bien vraie:
  Alors

$$\begin{aligned} T_{k+1}(-x) &= 2(-x)T_k(-x) - T_{k-1}(-x) = 2(-x)((-1)^k T_k(x)) - (-1)^{k-1} T_{k-1}(x) \\ &= (-1)^{k+1} (2xT_k(x) - T_{k-1}(x)) = (-1)^k T_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n \text{ a la parité de } n}$$

4.
(a) On a $T_0(1) = T_1(1) = 1$, $\forall k \geq 1\ T_{k+1}(1) = 2T_k(1) - T_{k-1}(1)$. donc par récurrence (double) évidente :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } T_n(1) = 1}$$

(b) Par parité on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } T_n(1) = (-1)^n}$$

(c) Si n est impair T_n est impaire donc $T_n(0) = 0$
De plus $T_0(0) = 0$ et $\forall k \geq 1\ T_{k+1}(0) = -T_{k-1}(0)$, donc si n est pair $T_n(0) = (-1)^{n/2}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } T_n(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ (-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}}$$

5. Unicité: Si il existe deux polynômes A_n et B_n tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R}\ A_n(\cos(\theta) = B_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, alors le polynôme $A_n - B_n$ admet une infinité de racines (tous les éléments de $[-1, 1]$) . C'est donc le polynôme nul.
existence: On utilise la relation :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

et donc

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$

Posons : H_n : T_n a la parité de n i.e; : $\forall \theta \in \mathbb{R}\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n)$

- H_0, H_1 sont bien vérifiées. En effet $T_0 = \cos(0) = \cos(0\theta)$, $T_1 = \cos(\theta)$
- Supposons H_{k-1} et H_k vérifiés montrons que H_{k+1} est bien vraie:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\,T_k(\cos(\theta)) - T_{k-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta) \\ &= \cos((k+1)\theta) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \ T_k(\cos(k\theta)) = \cos(k\theta)}$$

6.
(a) Soit $x \in [-1,1]$ une racine de T_n , on peut poser $\theta = \arccos(x)$, on a donc $\cos(n\theta) = 0$ donc $n\theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
Les racines de T_n sur $[-1,1]$ sont les $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Si on prend $k \in [0, n-1]$ les $\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$ sont tous sur $[0,\pi]$, intervalle où cos est monotone. Les x_k correspondants sont 2 à 2 distincts. On a donc trouver n racines distinctes pour un polynôme de degré n. On a donc toutes les racines.

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } T_n \text{ sont les } x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \ , \ k \in [[0, n-1]]}$$

7. Les fonction T_n et cos étant dérivables, on peut dériver $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. On a alors $-\sin(\theta)\,T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$.
Donc des racines de T_n' sur $[-1,1]$ sont les $\cos(\theta)$ tels que $\sin(\theta) \neq 0$ et $\sin(n\theta) = 0$. On trouve donc $n-1$ racines : $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [[1, n-1]]$.
Or le polynôme est de degré $n-1$. La question est finie

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } T_n' \text{ sont les } x_k = \cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) \ , \ k \in [[1, n-1]]}$$

Partie B

1.
(a) L est une norme :

- L est bien défini : le max existe car la fonction $t -> |P(t)|$ est continue sur le segment $[-1,1]$
- L est positive : le max d'une quantité positive est positive
- si $L(P) = 0$ alors pour tout $t \in [-1,1]$: $0 \leq |P(t)| \leq \sup = 0$ donc P est la fonction nulle sur $[-1,1]$ donc P est nul (infinité de racines pour un polynôme)
- l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont bien vérifiée.

(b) N est une norme

- N est bien défini : le max existe car on a un ensemble fini non vide.
- N est positive : le max d'une quantité positive est positive
- si $N(P) = 0$ alors pour tout k :$0 \leq |a_k| \leq \sup = 0$ donc tous les coefficients sont nuls et donc P est nul
- l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont bien vérifiée.

$$\boxed{L \text{ et } N \text{ sont des normes sur } \mathbb{R}[X]}$$

2. $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes . d'où l'existence de α_n et γ_n
3.
(a) On a :

$$\forall t \in [-1,1] \ , \ |P(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|t|^k \leq \sum_{k=0}^{n} N(P).1 = (n+1)N(P)$$

On a donc un majorant indépendant de t donc

$$L(P) \leq (n+1)N(P)$$

(b) Pour avoir l'égalité $L(P) = (n+1)N(P)$ il suffit d'avoir l'égalité dans toutes les inégalités précédentes pour au moins un t . Il suffit de prendre $Q_n = \sum_{k=0}^{n} t^k$. On a alors $N(Q_n) = 1$ et $L(Q_n) = Q_n(1) = n+1$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ , } L(P) \leq (n+1)N(P) \text{ et } \exists Q_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ , } L(Q_n) = (n+1)N(Q_n)}$$

4. Pour $t \in [-1, 1]$ on peut poser $t = \cos(\theta)$ et alors $T_n(t) = \cos(n\theta)$ (question **A.5**). Donc $L(T_n) \leq 1$. Mais on sait que si $t = 1$ alors $T_n(t) = 1$ (question **A.4**), 1 est donc le maximum.

$$\boxed{L(T_n) = 1}$$

5.
(a) Une primitive de la fonction continue sur $]-1, 1[$ $t -> \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est $t -> \arcsin(t)$ qui admet des limites finies en -1 et 1 . Donc l'intégrale impropre $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge (et vaut π)
On a alors

$$\forall t \in [-1, 1], \left| \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{L(P).L(Q)}{\sqrt{1-t^2}}$$

La fonction $t -> \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ étant continue sur $]-1, 1[$, on a donc la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ (i.e l'intégrabilité de $t -> \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$)
(b) φ est un produit scalaire :

- $\varphi(P, Q)$ est défini d'après le **(a)** et est un réel .
- φ est symétrique car le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$
- φ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.
- φ est positive par croissance de l'intégrale impropre.
- φ est définie positive : Si $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$on a l'intégrale d'une fonction continue positive qui est nulle , donc la fonction est nulle . et donc $\forall t \in]-1, 1[$, $P(t) = 0$, le polynôme a une infinité de racines , il est nul.

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$$

(c) On peut faire un changement de variable C^1 bijectif dans une intégrale impropre . Or $t -> \theta = \arccos(t)$ est C^1 bijectif de $]-1, 1[$ sur $]0, \pi[$

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^{0} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta)) (-d\theta) = \int_{0}^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta)) d\theta$$

6. D'après la question précédente est **A.5**

$$\varphi(T_n T_m) = \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)}{2} d\theta$$

d'où une séparation des cas

- si $m = n = 0$

$$\varphi(T_n T_m) = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

- si $m = n \neq 0$ on a $m + n \neq 0$ et $m - n = 0$

$$\varphi(T_n T_m) = \int_0^{\pi} \frac{\cos((m+n)\theta) + 1}{2} d\theta = \left[\frac{\sin((m+n)\theta)}{2(m+n)} \right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

- si $m \neq n$ on a $m-n \neq 0$ et $m+n \neq 0$ (on est dans $\mathbb{N}$)

$$\varphi(T_n T_m) = \int_0^\pi \frac{\cos((m+n)\theta)+1}{2} d\theta = \left[\frac{\sin((m+n)\theta)}{2(m+n)} + \frac{\sin((m-n)\theta)}{2(m-n)}\right]_0^\pi = 0$$

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ , \ \varphi(T_m, T_n) = \begin{cases} \pi \text{ si } m=n=0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } m=n \neq 0 \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{cases}}$$

7. La famille $(T_k)_{k=0}^n$ est une famille échelonnée en degré (**A.1**) . C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, d'où l'existence d'une décomposition unique.
On a alors

$$\varphi(P, T_m) = \begin{cases} \pi\alpha_0 \text{ si } m=0 \\ \dfrac{\pi}{2}\alpha_m \text{ si } m \neq 0 \end{cases}$$

en utilisant l'orthogonalité vue à la question précédente.
Or

$$|\varphi(P, T_m)| = \left|\int_0^\pi P(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta)\, d\theta\right| \leq \int_0^\pi L(P).L(T_m) d\theta = \pi L(P)$$

l'inégalité est vérifiée car $\cos(\theta) \in [-1, 1]$. La dernière égalité utilise **B.4**:$L(T_n) = 1$
Le résultat en découle après simplification par π :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \ , \ \left|\alpha_m\right| \leq 2L(P)}$$

8. On sait que, par définition, $T_{n+1} = 2XT_n + T_{n-1}$. Donc comme N est une norme $N(T_{n+1}) \leq 2N(XT_n) + N(T_{n-1})$. Mais XT_n et T_n ont les mêmes coefficients donc $N(XT_n) = N(T_n)$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1})}$$

9.Encore une récurrence double pour prouver $H_n : N(T_n) \leq q^n$

- $N(T_0) = N(1) = 1 \leq q^0$, $N(T_1) = N(X) = 1 \leq q^1$
- Si $N(T_k) \leq q^k$ et $N(T_{k-1}) \leq q^{k-1}$ on a

  $$N(T_{k+1}) \leq 2q^k + q^{k-1} = q^{k-1}(2q+1)$$

  on vérifie $2q+1 = 3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$ et donc

  $$N(T_{k+1}) \leq q^{k+1}$$

10. Comme N est une norme et que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$ on a

$$N(P) \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|\, N(T_k)$$

donc en majorant avec les 2 questions précédentes :

$$N(P) \leq \sum_{k=0}^{n} 2L(P)q^k = 2L(P)\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \leq 2L(P)\frac{q^{n+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}q^{n+1}L(P)$$

d'où la majoration voulue.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \frac{1}{q^{n+1}\sqrt{2}} N(P) \leq L(P)}$$

11. Si on reprend le polynôme Q_n de la question **B.3** on a $L(Q_n) = n+1$ et $N(Q_n) = 1$. Si on regarde la suite $\left(\dfrac{Q_n}{n}\right)_{n \geq 1}$. On constate que cette suite tend vers 0 pour N et ne tend pas vers 0 pour L . les deux normes ne sont pas équivalentes.

partie C

1. La linéarité ne pose pas de problème et $d^\circ(P) \leq n \Rightarrow d^\circ(\psi(P)) \leq n$ non plus
2.
(a)

- $\psi(1) = 0$
- $\psi(X) = X$
- pour $k \geq 2$: $\psi(X^k) = k(k-1)(X^{k-2})(X^2 - X) + (kX^{k-1})X = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$

et donc

$$Mat_{(X^k)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 9 & \ddots & n(1-n) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n^2 \end{pmatrix} = M$$

avec

$$\forall (i,j) \in [[1, n+1]]^2 \ , m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{c} (i-1)^2 \text{ si } i = j \\ -(i)(i+1) \text{ si } j = i+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

remarque : si $j = i+2$ on a aussi $m_{i,j} = -(j-2)(j-1)$
(b) On doit calculer $\left(X^2 - 1\right) T"_k + XT'_k$. Comme en partie **A** , il suffit de se placer sur $[-1, 1]$ et de poser $x = \cos(\theta)$
On a $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$, $\sin(\theta)T'_k(\cos(\theta)) = k\sin(k\theta)$ d'après les calculs de **A.7**
on a en dérivant (tout est C^1)

$$\cos(\theta)T'_k(\cos(\theta) - \sin(\theta)^2 T"_k(\cos(\theta)) = k^2\cos(k\theta)$$

donc

$$\begin{array}{rcl} (x^2-1)T"_k(x) + xT'_k(x) & = & ((\cos(\theta) - 1)^2 T"_k(\cos\theta)) + \cos(\theta)T'_k(\cos(\theta)) \\ & = & \cos(\theta)T'_k(\cos(\theta)) - \sin(\theta)^2 T"_k(\cos(\theta)) \\ & = & k^2 T_k(\cos(\theta)) \end{array}$$

On a donc $\forall k \in [[0, n]]$: $\psi(T_k) = k^2T_k$.L'égalité entre polynômes étant vrai pour une infinité de valeurs.

$$\boxed{\text{la matrice de } \psi \text{ dans la base canonique est la matrice diagonale } diag(0, 1, 4, \cdots k^2, \cdots n^2)}$$

3. Que l'on regarde la matrice diagonale ou la matrice triangulaire , on retire la première colonne il reste une matrice "triangulaire" ayant tous ses termes diagonaux non nuls . Donc de rang n . Le noyau est de dimension 1 , et on a une solution évidente $\text{Ker}(\psi) = \mathbb{R}_0[X]$. L'image est engendré par les vecteurs colonnes de la matrices . On a n vecteurs colonnes non nuls pour un espace de dimension n donc une base de l'image.
2 réponses possibles :

- une base de l'image est : $X, 4X^2 - 2, \cdots k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}, \cdots n^2X^n - n(n-1)X^{n-2}$
- une base de l'image est la famille $(T_k)_{k=1}^n$

remarque : le sujet n'est pas le sujet initial : le sujet initial fait calculer la matrice dans la base canonique , puis fait étudier les vecteurs propres pour trouver les polynômes de Tchebichev , sans dire ce qu'il faut trouver.

partie D

1) d'après **A2** $\lambda_0 = 1$ et pour $n > 0$, $\lambda_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
2)
(a) comme $L(T_n) = 1$ on a

$$\boxed{L(Q_n) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } n = 0 \\ 2^{1-n} \text{ si } n \geq 1 \end{array} \right.}$$

(b)

- si $n = 0$ $Q_n(x) = 1$ est vrai pour tout réel

- si $n > 0$,
  - Etude sur $[-1,1]$: $Q_n(x) = \pm 2^{1-n} \Leftrightarrow T_n(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = \pm 1 \Leftrightarrow n\theta = 0[\pi]$

    On a donc $n+1$ solutions sur $(-1,1]$ les $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $0 \leq k \leq n$
  - Etude sur $[1,+\infty[$: cette fois ci le nombre de solutions n'est pas suffisant pour utiliser le degré , mais d'après la partie **A** on a $T_n(1) = 1$, T_n' n'a pas de racines sur $[1,+\infty[$ et enfin $\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = \sin(n\theta)$ donne $T_n'(1) = \lim\limits_{\theta->0}\left(\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}\right) = n > 0$ .T_n' est donc positive en 1 , continue sur $[1,+\infty[$ et n'a pas de racine sur cet intervalle . Donc $T_n'(x) > 0$ sur $[1,+\infty[$. La fonction est strictement croissante et vaut 1 en 1 . $T_n'(x) = \pm 1$ n'a pas de racine sur $]1,+\infty[$
  - de même sur $]-\infty,-1[$ par croissance (si n est impair)ou décroissance (si n est paire) .

(c) avec les notations du sujet $c_k = \cos\left(\dfrac{(k-1)\theta}{n}\right)$, ce qui respecte la décroissance des racines.
Le signe de $Q_n(c_k)$ est celui de $T_n\,(c_k)$ donc celui de $\cos((k-1)\pi)$ donc $(-1)^{k-1}$

$$\boxed{Q_n(c_k) \text{ est celui de } (-1)^{k-1}}$$

3. Si $n = 0$ E_n est réduit au polynôme $Q_0 = 1$. Il est évident que l'existence de P est alors absurde.
L'étude se fait uniquement si $n > 0$
(a) comme $|Q_n(c_k| = L(Q_n)$ et $|P(c_k)| \leq L(P) < L(Q_n)$ le signe de $(Q_n - P)\,(c_k)$ est celui de $Q_n(c_k)$

$$\boxed{\text{le signe de } (P - Q_n)\,(c_k) \text{ est } (-1)^k}$$

(b) On a donc que $P - Q_n$:

- est un polynôme de degré au plus $n-1$ (par définition de E_n les coefficients dominants se simplifient)
- ayant au moins n racines , en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque segment $[c_{k+1}, c_k]$ où la fonction est continue et change de signe.

  et donc $P = Q_n$ ce qui est absurde car $L(P) \neq L(Q_n)$

4. D'après la question précédente $P \in E_n \Rightarrow L(P) \geq L(Q_n)$ et donc comme $Q_n \in E_n$ on a $\alpha_n = L(Q_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 2^{1-n} \text{ si } n > 0 \end{cases}$