CCP PSI 2 2011
Etude de compacité.

- **I.1)**

I.1.1.) On cherche le polynôme caractéristique : $P_S(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$. S a donc deux valeurs propres simples 1 et 5 . Les sous-espaces propres sont des droites.

S étant symétrique réelle, on cherche tout de suite une base orthonormale de vecteurs propres et le calcul donne $E_1(S) = \text{Vect}(I)$ avec $I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $E_5(S) = \text{Vect}(J)$ avec $J = R_{\pi/2}(I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Soit :

$$\boxed{S = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \text{diag}(1,5) \text{ et } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

On a :

$$(x|s(x)) = 2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2$$

Si on pose $x = X_1I + X_2J$ dans la base orthonormée (directe) de vecteurs propres on a

$$(x|s(x)) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} {}^tPPD^tP \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_1^2 + 5X_2^2$$

σ a l'équation

$$2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2 = 1 \text{ soit } \left(\frac{X_1}{1}\right) + \left(\frac{X_2}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2 = 1$$

σ est une ellipse, (le centre est O, les axes sont dirigés par I et J et sont de demi longueur 1 et $1/\sqrt{5}$;). D'où le graphe de σ .

I.1.2) La matrice proposée est la même qu'à la question précédente en retirant I_2 . Donc :

$$\boxed{S = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \text{diag}(0,4) \text{ et } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

Si on pose $x = X_1I + X_2J$ dans la base de vecteurs propres on a

$$(x|s(x)) = 4X_2^2$$

et σ a donc l'équation :

$$4X_2^2 = 1 \text{ soit } X_2 = \pm\frac{1}{2}$$

σ est l'union de deux droites parallèles de direction I .

I.2.)

I.2.1) Comme la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormale de vecteurs propres

$$(x|s(x)) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \middle| \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_2 a_2 \\ \vdots \\ \lambda_n a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i$$

Comme $\lambda_1 > 0$, on peut prendre $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\forall i \geq 2\ a_i = 0$. Le vecteur $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\varepsilon_1$ vérifie $(x|s(x)) = 1$ et est donc c'est un élément de Σ :

$$\boxed{\Sigma \neq \emptyset}$$

Par ailleurs pour tout vecteur x :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

et donc comme les λ_i sont rangés par ordre croissant $\forall i \geq 1\ \lambda_i \geq \lambda_1$ et donc :

$$(x|s(x) \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda_1\|x\|^2$$

Pour $x \in \Sigma$ on a donc $\|x\| \leq \frac{1}{\lambda_1}$ (existe car $\lambda_1 > 0$)

$\boxed{\Sigma \text{ est donc bornée}}$

On peut aussi dire que comme tous les termes de la somme sont positifs, pour tout i $|x_i| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$. *Et comme* $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ *ne dépend plus de i c'est un majorant de* $\{x_i\}$ *et donc* $\|x\|_\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$

(5/2) : $x \mapsto (x|s(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i((x|s(x))$ est une somme de carrée de fonctions continue , donc est continue. Σ est alors l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une fonction continue donc est fermé.Σ est fermé bornée donc est compact.

I.2.1.) La base proposée existe car S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormé.

- **I.2.1.1)** On suppose par l'absurde que $\lambda_n \leq 0$, l'hypothèse sur l'ordre des λ_i impose : $\forall i$, $\lambda_i \leq 0$ et donc $(x|s(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i \leq 0$. Donc pour tout x $(x|s(x)) \leq 1$ et <u>Σ est vide</u>, ce qui est absurde

  I.2.2.2.) Comme $\lambda_n > 0$ et $\lambda_1 \leq 0$ on a $\dfrac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n} > 0$ et donc x_r est bien défini pour tout r .

  Les formules de calcul donne :

$$(x_r|s(x_r)) = \lambda_1 r^2 + \lambda_n \frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n} = 1 \text{ et } \|x_r\|^2 = r^2 + \frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n} = \frac{r^2(\lambda_n - \lambda_1) + 1}{\lambda_n}$$

  soit : $x_r \in \Sigma$. et comme $\lambda_n - \lambda_1 > 0$: $\lim\limits_{r \to +\infty} \|x_r\|^2 = +\infty$. On en déduit que Σ n'est pas bornée.

$$\boxed{\Sigma \text{ est borné non vide si et seulement } \lambda_1 > 0 \ S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

  Ce qui équivaut à $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

  Vous avez presque fous oublié de vérifier que x_r *existe . (Et donc la démonstration pose problème car elles n'utilise pas les hypothèses sur les* λ *)*

  remarque : on a une généralisation en dimension quelconque des ellipses du plan et des ellipsoïdes de l'espace.

Racine carrée d'une matrice de S_n^+

II.1.1. Si $S \in S_n^+$ alors $\forall X, {}^tXSX \geq 0$. On prend $X = X_i$ un vecteur propre ; On a :${}^tX_iSX_i \geq 0$ et${}^tX_iSX_i = {}^tX_i\,(\lambda_i X_i) = \lambda_i \|X_i\|^2$ et donc :

$$\forall i, \lambda_i \geq 0$$

II.1.2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on peut décomposer dans la base orthonormale X_i : $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$ on a :

$${}^tXSX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Comme les λ_i sont tous positifs ou nuls alors${}^tXSX \geq 0$ et $S \in S_n^+$.

$$\boxed{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp\,(S) \subset \mathbb{R}^+}$$

II.1.3. On diagonalise dans une base orthonormale : il existe une matrice orthogonale P telle que $S = P\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tP$ avec (d'après le résultat admis) les λ_i tous strictement positifs.

S est inversible comme produit de matrices inversibles et

$$S^{-1} = P\text{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)^tP$$

Cette matrice est bien symétrique (${}^t\left(S^{-1}\right) = {}^t\left(P\text{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)^tP\right) = P\text{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)^tP = S^{-1}$) et ses valeurs propres sont strictement positives comme inverses de réels strictement positifs. . On a donc avec le résultat admis :

$$\boxed{S^{-1} \in S_n^{++}}$$

II.2.1. Comme $S \in \mathcal{S}_n^+$ on a pour tout i : $\lambda_i \geq 0$ et donc Δ est bien définie.

De manière évidente :

$$\Delta^2 = D$$

On a $NY = \mu Y$ donc $N^2 Y = \mu^2 Y$ soit comme $N^2 = D$: $DY = \mu^2 Y$ ce qui donne, en regardant les coordonnées :

$$\forall i \in [|1, n|],\ \lambda_i y_i = \mu^2 y_i$$

- Si $y_i \neq 0$ on a $\mu^2 = \lambda_i$ avec $\mu \geq 0$ et $\lambda_i \geq 0$ et donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ ce qui donne $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$.
- Si $y_i = 0$ on a $0 = 0$ et le résultat reste vrai.

$$\forall i \in [|1, n|],\ \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$$

Ceci s'écrit matriciellement $\mu Y = \Delta Y$ ou encore $NY = \Delta Y$.

L'égalité $NY = \Delta Y$ est donc vérifié pour tout vecteur propre de N . Comme N est symétrique, il existe une base de vecteurs propres. L'égalité $NY = \Delta Y$ est donc vérifiée pour tout vecteur d'une base , donc par linéarité pour tout vecteur de $\mathbb{R}^n$. On a donc par unicité de la matrice d'une application linéaire :

$$\Delta = N$$

II.2.2. S est diagonalisable dans une base orthonormale d'où la décomposition $S = UD^tU$. Pour toute matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $N = U\Delta^tU$. On a alors $T^2 = S \Leftrightarrow N^2 = D$. On vient de prouver que la seconde égalité admet une unique solution. La première admet donc aussi une unique solution.

$$\boxed{\forall S \in S_n^+,\ \exists ! T \in S_n^+ /\ T^2 = S}$$

De plus si $S = U \operatorname{diag}(\lambda_i)^t U$ on a $T = U \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)^t U$

II.3.1. On sait que si x est un vecteur propre d'un endomorphisme f associé à la valeur propre λ ,alors pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i$, x est un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda\ )$

On peut retrouver le résultat en vérifiant que si $f(x) = \lambda x$ alors $\left(\sum_{p=0}^{d} p_i f^i\right)(x) = \sum_{p=0}^{d} p_i f^i(x) = \sum_{p=0}^{d} p_i \lambda^i x = \left(\sum_{p=0}^{d} p_i \lambda^i\right)(x) = P(\lambda)$

a donc pour tout $L_k(S) X_i = L_k(\lambda_i) X_i$

Par l'interpolation de Lagrange : $L_k(\mu_k) = 1$ et $L_k(\mu_m) = 0$ si $m \neq k$

On a donc :

- Si $\lambda_i = \mu_k$ alors $L_k(S) X_i = X_i$.
- Sinon, $\lambda_i = \mu_m$ avec $m \neq k$ et $L_k(S) X_i = 0$.

II.3.2. Les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et pour tout polynôme P on a $P = \sum_{k=1}^{p} P(\mu_k) L_k$ .Et donc ici :

$$P = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k$$

On a :

$$P(S) X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(X_i) = \sum_{k, \mu_k \neq \lambda_i} \sqrt{\mu_k} O + \sqrt{\lambda_i} X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i$$

$P(S) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ car dans la base (X_i) la matrice de $P(S)$ est diag $\left(\sqrt{\lambda_i}\right)$. La matrice est donc symétrique dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont positives

De plus $P(S)^2 X_i = \left(\sqrt{\lambda_i}\right)^2 X_i = S X_i$. Ainsi on égalité pour tous vecteurs de la base et donc $P(S)^2 = S$. Par l'unicité de **II.2.2.** on a

$$\boxed{P(S) = \sqrt{S}}$$

II.3.3. Un calcul du polynôme caractéristique (qui peut commencer par $L_3 \longleftarrow L_2 + L_3$ pour faire apparaître le facteur 3) donne les valeurs propres 3 (double) et 9 (simple).

S est symétrique à valeurs propres positives donc $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$

On a reprend le calcul précédent avec $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 9$. D'où $L_1(a) = \dfrac{a-9}{3-9}$ et $L_2(a) = \dfrac{a-3}{9-3}$ d'où

$$P(a) = \sqrt{3}\frac{a-9}{3-9} + 3\frac{a-3}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}a + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

et donc :

$$\boxed{\sqrt{S} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}S + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}I_n}$$

Une propriété de la trace des matrices de S_n^+

III.1.1. Les coefficients d'un vecteur de norme 1 sont toujours inférieurs à 1 . $(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$ et $\forall i, v_i^2 \geq 0) \Rightarrow \forall i$, $v_i^2 \leq 1$. La remarque est vraie aussi pour une matrice orthogonale. On a $tr(\delta V) = \sum_{i=1}^{n} (\delta V)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{i,i}$ .On multiplie les inégalités $v_{i,i} \leq 1$ par $\alpha_i \geq 0$ (ce qui ne change pas le sens) et on ajoute des inégalités de même sens :

$$tr(\delta V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ii} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = tr(\delta)$$

III.1.2. Comme S est symétrique réelle, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\delta = \operatorname{diag}(\alpha_i)$ tels que $S = PD^tP$. Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les α_i sont tous positifs.

Pour toute matrice U orthogonale, on peut poser (même changement de base) $V = PU^tP$. On a alors $SU = P(\delta V)^t P$.

V est le produit de matrices orthogonales donc est orthogonale . On a donc $tr(\delta V) \leq tr(\delta)$. Deux matrices semblables ayant même trace :

$$\boxed{\forall U \in O_n(\mathbb{R}) \ , tr(SU) \leq tr(S)}$$

On peut aussi dire en utilisant $tr(AB) = tr(BA)$: $tr(SU) = tr(PD^tPU) = tr(D^tPUP) = tr(DW)$ avec $W =^t PUP$ matrice orthogonale comme produit de matrices orthogonales. et donc $tr(SU) = tr(DW) \leq Tr(D) = tr(S)$

III.2.1. C'est l'amplitude et la phase en utilisant un sin et pas un cos :

- Si $a = b = 0$ alors le résultat est immédiat pour tout θ .
- Sinon, $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Il existe φ tel que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\varphi)$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi))$. On a alors :
$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin(\varphi)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta)) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$$
Si $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leq a$ pour tout θ alors $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi) \leq a$ pour tout θ.
Or $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$ varie de $-\sqrt{a^2+b^2}$ à $+\sqrt{a^2+b^2}$.
On a donc $\sqrt{a^2+b^2} \leq a$ et donc $b = 0$.

$$\boxed{(\forall \theta \in \mathbb{R}, a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leq a) \Rightarrow b = 0}$$

III.2.2. On part de la matrice identité , on retire les coefficients 1 qui sont ligne p et ligne q , et on met aux 4 intersections des ligne p et q les coefficients de la rotation:

- si $p = 1, q = 2$ on a avec U qui est bien orthogonale.

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots \\ & & & \ddots\ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, AU = \begin{pmatrix} a_{1,1}\cos(\theta) + a_{1,2}\sin(\theta) & ? & ? & ? & ? \\ ? & -a_{2,1}\sin(\theta) + a_{2,2}\cos(\theta) & & & ? \\ ? & & a_{3,3} & & ? \\ ? & & & \ddots & ? \\ ? & ? & ? & ? & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

donc $tr(AU) = (a_{1,1}+a_{2,2})\cos(\theta) + (a_{1,2}-a_{2,1})\sin(\theta) + \sum_3^n a_{i,i}$ et $tr(A) = (a_{1,1}+a_{2,2}) + \sum_3^n a_{i,i}$

La condition $tr(AU) \le tr(A)$ impose donc que pour tout θ : $(a_{1,1}+a_{2,2})\cos(\theta) + (a_{1,2}-a_{2,1})\sin(\theta) \le (a_{1,1}+a_{2,2})$

La question précédente impose donc $a_{2,1} = a_{1,2}$

- Dans le cas général en utilisant $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$U = \sum_{i\notin\{p,q\}} E_{i,i} + \cos(\theta)E_{p,p} + \sin(\theta)E_{q,p} + \cos(\theta)E_{q,q} - \sin(\theta)E_{p,q})$$

Le calcul classique de $AE_{i,j}$ donne $AE_{i,j} = (0,0,\cdots,C_i,0\cdots0)$ avec la j-ème colonne de $AE_{i,j}$ qui contient la i-ème de A, On a donc $tr(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.

Donc par linéarité :

$$tr(AU) = \sum_{i\notin\{p,q\}} a_{i,i} + \cos(\theta)(a_{p,p}+a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q}-a_{q,p})$$

La condition $tr(AU) \le tr(A)$ donne donc pour tout θ: $\cos(\theta)(a_{p,p}+a_{q,q}) + \sin(\theta)(a_{p,q}-a_{q,p}) \le (a_{p,p}+a_{q,q})$. la question précédente impose $a_{p,q} = a_{q,p}$

Ceci est vrai pour tout $p<q$:

$$\boxed{A \in S_n(\mathbb{R})}$$

III.2.3. Dans la base de vecteurs propres $tr(A) = \sum_{i=1}^n \beta_i$. , $U = \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$ et $tr(AU) = -\beta_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i = tr(A) - 2\beta_1 > tr(A)$ car $\beta_1 < 0$: absurde

L'Hypothèse de la question "il existe une valeur propre strictement négative" est absurde . Donc toutes les valeurs propres son positives

$$\boxed{(\forall U \in O_n(\mathbb{R}), tr(SU) \le tr(S)) \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

Des inégalités remarquables

T existe et est unique d'après la deuxième partie.
S(et T) sont bien inversible car éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après **II.1.3**
S^{-1} et T^{-1} sont dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après **II.1.3**

IV.1. Il faut remarquer que d'après la définition de t : $(s(x)|x) = \left(t^2(x)|x\right) = (t(x)|t(x)) = \|t(x)\|^2$ car t est un endomorphisme symétrique.

De même $\left(s^{-1}(x)|x\right) = \left\|t^{-1}(x)\right\|^2$

L'inégalité demandé est donc celle de Cauchy Schwarz :

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \le \|t(x)\|^2 . \left\|t^{-1}(x)\right\|^2$$

Il y a égalité dans Cauchy Schwarz si et seulement si les 2 vecteurs sont liés :

- si $t^{-1}(x) \neq 0$: $\exists\lambda$, $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$. On peut composer par t qui est bijective $\left(t(x) = \lambda t^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow \left(t^2(x) = \lambda x\right) \Leftrightarrow (s(x) = \lambda x)$.
- si $t^{-1}(x) = 0$, alors $x = 0$ (t^{-1} est injective)

$$\boxed{\forall x \in E, (t(x)|t^{-1}(x))^2 \le (s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) \text{, avec égalité pour 0 et pour les vecteurs propres de } s}$$

IV.2. Si on factorise, on trouve $P(a) = (a-\lambda_1)(a-\lambda_n)$ et donc tous les λ_i sont entre les racines de P et on a

$$\forall i,\ P(\lambda_i) \le 0$$

Comme $s(x) = \lambda_i x$, $s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i}x$ et $P(s)(x) = P(\lambda_i)x$. Ainsi

$$v(x) = -P(s)(\frac{1}{\lambda_i}x) = -\frac{1}{\lambda_i}P(s)(x) = -\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}x$$

Le résultat est vrai pour tous les vecteurs propres de la base de vecteurs propres de s (qui existe car s est symétrique)

Dans cette base la matrice de $P(s)$ est $\mathrm{diag}\left(-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}\right)$, c'est une matrice symétrique à valeurs propres positives d'après l'hypothèse et la question précédente.

$$V \in S_n^+$$

IV.3. On a

- $Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n$, s^{-1} est symétrique définie positive (**II.1.3)**, λ_1 et λ_n sont strictement positifs donc $Q(0) > 0$
- $Q(1) = (s(x)|x) - (\lambda_1 + \lambda_n) \|x\|^2 + \left(s^{-1}(x)|x\right) = (s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + \lambda_1\lambda_n s^{-1}(x)|x) = -(v(x)|x) \leq 0$ car v est positif.

Comme $x \neq 0$, Q est un polynôme du second degré (car $(s(x)|x) > 0$) qui change de signe (au sens large) : son discriminant $\Delta \geq 0$ ce qui donne la relation:

$$\boxed{\forall \neq 0 : (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4}$$

remarque : on retrouve le principe de la démonstration de Cauchy Schwarz

IV.4. s est symétrique et donc les sous espaces propres associés à 2 valeurs propres distincts sont orthogonaux . x_1 et x_n sont orthogonaux . On a donc :

$$(s(x)|x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_n x_n | x_1 + x_n) = \lambda_1 + \lambda_n$$

$$(s^{-1}(x)|x) = (\lambda_1^{-1} x_1 + \lambda_n^{-1} x_n | x_1 + x_n) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}$$

$$(x|x) = (x_1 + x_2 | x_1 + x_2) = (x_1|x_1) + (x_2|x_2) = 2$$

On a donc bien égalité dans (2).

remarque : Si on revient à l'inégalité (1) on a, comme t est symétrique

$$(t(x)|t^{-1}(x)) = (x|t\left(t^{-1}(x)\right)) = \|x\|^2$$

Les deux égalités donnent donc, pour un endomorphisme défini positif l'encadrement :

$$\|x\|^4 \leq (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4$$