Partie I

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[-1,1]$ telles que la restriction de f à $[-1,0[$ soit un polynôme de degré inférieur ou égal à trois, la restriction de f à $]0,1]$ soit un (autre) polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1,1]$ tout entier.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel.

2. Soit
$$f\ :\ x \longmapsto \begin{cases} \alpha_1 x^3+\beta_1 x^2+\gamma_1 x+\delta_1 & \text{si } x<0 \\ \alpha_2 x^3+\beta_2 x^2+\gamma_2 x+\delta_2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ et δ_2 pour que f appartienne à $\mathcal{G}$.

3. On pose
$$f_0\ :\ x\mapsto 1,\quad f_1\ :\ x\mapsto x,\quad f_2\ :\ x\mapsto x^2$$
$$f_3\ :\ x\mapsto x^3,\quad f_4\ :\ x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$
Montrer que (f_0,f_1,f_2,f_3,f_4) forme une base de $\mathcal{G}$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?

Partie II

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement croissante. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\sigma_n=(x_0,\dots,x_n)$. On considère S_{σ_n} l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0,x_n]$ telles que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$, pour i variant de 0 à $n-1$, est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. On pourra noter que l'ensemble $\mathcal{G}$ de la partie I est du type S_{σ_2}.
Un élément de S_{σ_n} sera appelé *fonction spline*.
On note enfin $S^0_{\sigma_n}$ l'ensemble des fonctions splines $f\in S_{\sigma_n}$ telles que, pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, $f(x_i)=0$.

1. Montrer que S_{σ_n} est un espace vectoriel.

2. Quelle est la dimension de S_{σ_1} ?

3. On suppose que S_{σ_n} est de dimension d. Soit $(f_1,\dots,f_d)$ une base de S_{σ_n} et soit $f\in S_{\sigma_{n+1}}$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique d-uplet de réels $(a_1,\dots,a_d)$ tel que
   $$\forall x\in[x_0,x_n],\quad f(x)=\sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x).$$

   (b) Soit p_i le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f_{i|]x_{n-1},x_n[}=p_i$.
   On définit alors
   $$\forall i\leq d,\quad \tilde{f}_i\ :\ x\mapsto \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x\in[x_0,x_n[\\ p_i(x) & \text{si } x\in[x_n,x_{n+1}] \end{cases},$$
   $$\tilde{f}_{d+1}\ :\ x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[x_0,x_n[\\ (x-x_n)^3 & \text{si } x\in[x_n,x_{n+1}] \end{cases}.$$

On pose enfin $F = f - \sum_{i=1}^{d} a_i \tilde{f}_i$.
Montrer que sur $[x_n, x_{n+1}]$, F est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $F(x_n) = F'(x_n) = F''(x_n) = 0$.

(c) Montrer que $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d+1})$ forme une base de $S_{\sigma_{n+1}}$.

(d) En déduire que la dimension de S_{σ_n} est $n+3$.

4. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 sur $[a, b]$ (avec $a < b$) vérifiant

$$p(a) = \alpha, \quad p'(a) = \beta, \quad p''(a) = \gamma, \quad p(b) = \delta$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels fixés.

(b) Soit $(y_0, \dots, y_n, \alpha, \beta)$ $n+3$ réels fixés. Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe une unique fonction spline $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad f(x_i) &= y_i, \\ f'(x_0) &= \alpha, \\ f''(x_0) &= \beta. \end{aligned}$$

(c) Montrer que $S^0_{\sigma_n}$ est un espace vectoriel.
Préciser sa dimension.

5. Soit $f \in S^0_{\sigma_n}$.

(a) Que vaut $f^{(4)}(x)$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$?

(b) Montrer que

$$\int_{x_0}^{x_n} \left(f''(x)\right)^2 dx = f'(x_n)f''(x_n) - f'(x_0)f''(x_0).$$

faire le calcul
(On pourra dans un premier temps [redacted] sur $]x_i, x_{i+1}[$ [redacted]

(c) Soit $\begin{array}{rccc} \Phi : & S^0_{\sigma_n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi'(x_0), \varphi'(x_n)) \end{array}$.
Montrer que Φ est injective.
Φ est-elle bijective ?

(d) En déduire qu'il existe une unique fonction spline f de S_{σ_n} qui vérifie,

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad f(x_i) &= y_i, \\ f'(x_0) &= \alpha, \\ f'(x_n) &= \beta. \end{aligned}$$

Partie III

Pour toute fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f''(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
Soit g la fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, 2-périodique et qui vérifie
$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x).$$
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x).$$
   (b) Quelle est la série de Fourier de g'' ?
g'' est-elle égale à sa série de Fourier ?
   (c) En déduire que
$$\int_0^1 f''(x)^2 dx = \frac{\pi^4}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 n^4.$$
   (d) Montrer que si les séries à termes réels $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, alors la série $\sum a_n b_n$ converge absolument et
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}.$$
   (e) En déduire que
$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \|f\|.$$
On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2. Soit $\sigma = (0 = x_0, \ldots, x_n = 1)$ une subdivision de $[0,1]$. On note $h_i = x_{i+1} - x_i$ et $h = \displaystyle\sup_{0\leq i\leq n-1} h_i$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ l'unique fonction spline de S_σ qui vérifie
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \ \varphi(x_i) = f(x_i), \quad \varphi'(0) = f'(0), \quad \varphi'(1) = f'(1).$$
   (a) En considérant la fonction g_i définie pour tout $t \in [0,1]$ par
$$g_i(t) = (f - \varphi)(x_i + t\,h_i),$$
montrer que
$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\|f - \varphi\|}{3\sqrt{5}} h_i^{3/2}.$$
   (b) Montrer que
$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2.$$
On pourra dans un premier temps obtenir une expression simple de
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f''(t) - \varphi''(t)\big)\varphi''(t)\, dt$$
en effectuant une intégration par parties.
   (c) En déduire que
$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\|f\|}{3\sqrt{5}} h^{3/2}.$$