Moyenne de Césaro

On appelle suite des moyennes de Césaro associée à une suite réelle (u_n) la suite (σ_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de (σ_n) en fonction de propriétés portées par (u_n).

Partie I - Cas d'une suite monotone et convergente

On suppose dans cette partie que (u_n) est une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.

1.a Montrer que la suite (σ_n) est croissante.

1.b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq \ell$. Que peut-on en déduire ?

2.a Etablir $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$.

2.b En déduire que (σ_n) converge vers ℓ.

3. Que dire de la suite des moyennes de Césaro d'une suite décroissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$?

Partie II - Cas d'une suite convergente

Soit (u_n) une suite réelle convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$.

1.a Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$.

1.b Etablir que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|\sigma_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n+1} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1}.$$

1.c Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne : $\frac{|u_0 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n+1} \leq \varepsilon/2$.

2. Conclure que (σ_n) converge vers ℓ.

3. On suppose ici que la suite (σ_n) converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

3.a Montrer que la suite (u_n) n'est généralement pas convergente. On pourra exhiber un contre-exemple.

3.b Montrer que la suite (u_n) n'est pas nécessairement bornée. On pourra considérer la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} p \text{ si } n = p^3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

3.c On suppose en outre que la suite (u_n) est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante. Montrer alors par l'absurde que la suite (u_n) est majorée par ℓ. Conclure.

Partie III - Cas des suites périodiques

Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite réelle T périodique i.e. telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n.$$

On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.

On pose aussi

$$s = \frac{1}{T}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1}) .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+T-1}}{T}$.

2. On considère la suite (v_n) de terme général : $v_n = (n+1)\sigma_n - (n+1)s$.

2.a Montrer que (v_n) est T périodique.

2.b En déduire que (v_n) est bornée.

2.c Etablir que (σ_n) converge et préciser sa limite.