usage de la calculatrice interdite.

C'est un bon entraînement pour les concours de s'imposer de faire tous les calculs (produit de matrice , déterminant) à la main et de rédiger les calculs dans cet esprit sur la copie.
Pour préparer aussi une épreuve avec machine , et éviter de partir sur une fausse piste , utiliser ensuite votre machine pour voir ses possibilités et refaire le calcul à la machine et voir dans quels cas travailler à la machine est plus lent (plus rapide) que travailler à la main.

Dans toute l'épreuve,

- n est un entier naturel .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à n lignes et n colonnes,
- on identifiera la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f_A de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé,
- I_n est la matrice identité et O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- on note ${}^tA$ la matrice transposée de $A \in \mathcal{M}_n(R)$

.On admettra que si (u_n) est une suite convergente de réels et A une matrice indépendante de n , $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nA) = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\,A$

Questions de cours.

Dans les questions de cours n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Donner la définition de deux matrices semblables.
2. Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? **On justifiera la réponse par une démonstration ou un contre-exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra être amené à discuter selon les valeurs de n .**
    1. Deux matrices semblables ont même rang.
    2. Deux matrices ayant le même rang sont semblables.
    3. Deux matrices semblables ont le même déterminant.
    4. Deux matrices ayant le même déterminant sont semblables.
    5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 + 5A - 6I_n = O_n$ alors $\mathbb{R}^n = \ker(A + I_n) \oplus \ker(A - 6I_n)$.
    et les dernières questions pour les 5/2
    6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 - 5A - 6I_n = O_n$ alors $\mathbb{R}^n = \ker(A + I_n) \oplus \ker(A - 6I_n)$
    7. Deux matrices semblables ont le même polynôme carctéristique
    8. Deux matrices ayant le même polynôme carctéristique sont semblables.

Problème.

Dans tour le problème , n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. On suppose que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ on a

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ i \text{ si } j = i+1 \\ n-i-2 \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ si } |i-j| > 1 \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, pour $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, dans tout le problème, on note $E = \mathbb{R}^{n+1}$.

Partie I.

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Soit $B = {}^t AA$.

   1. Calculer B .
   2. (3/2) Montrer que B est semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et donner une matrice P inversible telle que $B = PDP^{-1}$
   3. (5/2) : Montrer que B est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et donner une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $B = PDP^{-1}$

2. (5/2) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$2x^2 + 4xz + y^2 + 2z^2 = 1$$

   1. Donner la nature de $\mathcal{C}$ et ses éléments de symétrie.
   2. Déterminer les intersections de $\mathcal{C}$ avec chacun des trois plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, notées respectivement C_1, C_2 et C_3.
   3. Donner une représentation graphique de chacune de ces intersections et une allure de $\mathcal{C}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^p par $X^3 - 10X^2 + 16X$.
   2. Justifier que $B^3 - 10B^2 + 16B = O_3$. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   3. Déterminer les réels a_p et b_p tels que
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B^p = a_p B^2 + b_p B$$
   4. Soit $T_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k$. Vérifier que $\forall p \in \mathbb{N}$, T_p est combinaison linéaire de I_{n+1}, B et B^2.
      Déterminer $\lim_{p \to +\infty} T_p$. (Exprimer le résultat comme combinaison linéaire de I_3, B, B^2 , puis calculer explicitement les 9 coefficients)

Partie II.

On prend dans cette partie $n = 3$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. On rappelle que $f^0 = id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. Pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on pose $u_{i+1} = f^i(e_1)$. Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{U}$.

   On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\det(P)$. Il existe donc une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ telle que $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$
4. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{V}$.
5. On pose $K = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice $Q \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $KAQ = D$? Si oui, en déterminer une.
6. Déterminer toutes les fonctions x, y, z et u de la variable réelle t, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2y(t) + 3u(t) \\ u'(t) = z(t) \end{cases}$$

Partie III.

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit g l'application définie par :

$$\forall Q \in E_n,\ g(Q) = nXQ - (X^2 - 1)Q'$$

où Q' désigne le polynôme dérivé du polynôme Q.

1. Vérifier que g est un endomorphisme de E_n et donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, \ldots, X^n)$ de E_n.
2. Soit $\mathcal{E}_\lambda$ l'équation différentielle :
$$(x^2 - 1)y'(x) + (\lambda - nx)y(x) = 0$$
où λ est un réel quelconque.
    1. Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}_\lambda$ pour $x \in]-1, 1[$.
    2. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel λ l'existence de solutions polynômiales non nulles de $\mathcal{E}_\lambda$ sur $]-1, 1[$.
3. Déterminer les réels λ et les polynômes non nuls P_λ vérifiant $g(P_\lambda) = \lambda P_\lambda$
4. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D semblable à A .
5. Calculer le déterminant de la matrice A. (on exprimera le résultat à l'aide de factoriels)

Partie IV.

On considère l'équation différentielle $\mathcal{F} :\ y''(x) - y(x) = 0$ et on note

- y_1 la solution de $\mathcal{F}$ qui vérifie $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$
- y_2 la solution de $\mathcal{F}$ qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$

Soient pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (y_1(x))^{n-k}(y_2(x))^k$ et $\mathcal{G} = (g_0, \ldots, g_n)$.

1. Exprimer y_1 et y_2 à l'aide des fonctions ch et sh.
2. Prouver que $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ dont $\mathcal{G}$ est une base.
3. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à une fonction h associe $\Delta(h) = h'$.
    1. Montrer que G est stable par Δ . Δ induit donc sur G un endomorphisme que l'on notera δ.
    2. On note, pour tout $m \in \mathbb{N}$, φ_m l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_m(x) = e^{(2m-n)x}$. Prouver que la famille $\mathcal{F} = (\varphi_m,\ m \in \{0, \ldots, n\})$ est une base de G.
    On pourra montrer que tout élément de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.
    3. Ecrire les matrices S de δ dans la base $\mathcal{G}$ et S' de δ dans la base $\mathcal{F}$
    4. Quels résultats retrouve-t-on ?