

\* Banque filière PT \*

## Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

Les quatre exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.

Toutes les réponses seront justifiées.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction

L'utilisation des calculatrices est autorisée.

### Premier exercice

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt.$$

1. Établir l'égalité :

$$\int_0^x \operatorname{Arctan}(2t) dt = x \operatorname{Arctan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2)$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  montrer l'inégalité :  $|\sin x| \leq |x|$ .
3. ~~Établir~~ montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Pour  $x \in \mathbb{R}$  calculer  $f''(x)$ .
5. En déduire une expression de  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.