❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

I. Première partie

Pour tout entier positif n, on pose :

$$K_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \, dt$$

1. Calculer K_0 , K_1, K_2 .

2. En développant $\left(1 - t^2\right)^n$ par la formule du binôme de Newton, calculer K_n (on montrera que K_n est une somme de fractions rationnelles).

3. Pour tout entier positif n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

Calculer I_0 , I_1, I_2 ,et J_0 , J_1 , J_2 .

4. Montrer que, tout entier n , le calcul de K_n peut se ramener au calcul de I_N ou J_N, où N est un entier dont on donnera la valeur en fonction de n.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

6. Pour tout entier positif p, exprimer, à l'aide de la relation de récurrence obtenue en 5., I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

7. Montrer que, pour tout entier strictement positif p , et tout x de $[\,0\,,\,\pi / 2\,]$:

$$0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$$

Quelle inégalité portant sur I_{2p-1} , I_{2p} , I_{2p+1} peut-on en déduire ?

8. Calculer, pour tout entier $p \geq 1$: $\dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$, et en déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$.

9. Exprimer, pour tout entier p : $\dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$.

10. En remarquant que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{4^p\,(p!)^2}{(2p)!}\right]^2$$

en déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right]^2 = \pi$$

11. *a*. Montrer que, lorsque p tend vers $+\infty$, I_{2p} est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

b. Montrer que, lorsque p tend vers $+\infty$, I_{2p+1} est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

c. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. .

II. Deuxième partie

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier positif n par :

$$u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n \, n!}$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Exprimer, pour tout entier positif n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

2. *a.* Rappeler le développement limité à l'ordre 3 lorsque x tend vers zéro de $\ln[1+x]$.

   b. En déduire un équivalent de $\ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. La série de terme général $\ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]$ est-elle convergente ?

4. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? On désignera, dans ce qui suit, et sous réserve d'existence, par l la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Donner, en fonction de l et n, un équivalent de n ! lorsque n tend vers $+\infty$.

6. A l'aide des résultats obtenus en I. 10, donner la valeur de l.

III. Troisième partie

On considère l'équation différentielle

$$16\left(x^2 - x\right)y'' + \left(16x - 8\right)y' - y = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

1. Soit $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction a est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]\,0\,,R\,[$, et n'est pas identiquement nulle. Montrer que, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)a_{n-1}}{8n(2n-1)}$$

Tournez la page S.V.P

2. Quelle est la valeur du rayon de convergence de la série $\left(\sum a_n x^n \right)$?

3. On suppose, dans ce qui suit, que $a_0 = 1$. Exprimer, pour tout entier strictement positif n, a_n en fonction de n.

4. Déterminer, à l'aide des résultats des parties précédentes, un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Les intégrales I_n et J_n sont les intégrales de Wallis, elles ont de nombreuses applications en géométrie et en mécanique, classique ou relativiste.