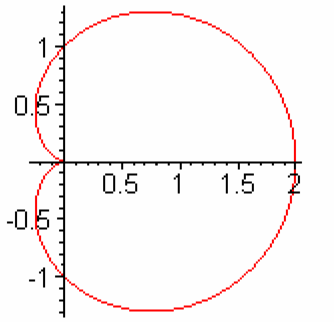
Correction

1.a $\rho(\theta+2\pi)=\rho(\theta)$ donc $M(\theta+2\pi)=M(\theta)$. $\rho(-\theta)=\rho(\theta)$ donc $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox). On peut limiter l'étude à $[0,\pi]$, on complétera la courbe par la symétrie annoncée.

1.b ρ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\rho'(\theta)=-\sin\theta\leq 0$ sur $[0,\pi]$. $\begin{array}{c|ccc|} \theta & 0 & & \pi \\ \hline \rho & 2 & \searrow & 0 \end{array}$.



1.c En $\theta=0$, $\rho(\theta)=2$, $\rho'(\theta)=0$. Le point a pour coordonnées $(2,0)$

En $\theta=\pi$, $\rho(\theta)=0$ et $\begin{array}{c|ccc|} \theta & & \pi & \\ \hline \rho(\theta) & + & 0 & + \end{array}$. Le point est l'origine, c'

tangente horizontale.

En $\theta=\pi/2$, $\rho(\theta)=1$, $\rho'(\theta)=-1$, $\cot V=-1$, $\tan V=-1$ puis

Le point a pour coordonnées $(0,1)$, la tangente y a pour pente 1.

1.d ci-contre

2.a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}=\sqrt{2+2\cos\theta}=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

donc $L(\Gamma)=\displaystyle\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$.

2.b $\cot V=\dfrac{\rho'}{\rho}=-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=-\dfrac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}=\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)$,

$V=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ convient sur $]-\pi,\pi[$ car $\rho(\theta)=1+\cos\theta>0$ permet de choisir $V\in\,]0,\pi[$.

$\alpha=V+\theta=\dfrac{3\theta+\pi}{2}$ puis $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{3}{4\cos\theta/2}$ pour $\theta\in\,]-\pi,\pi[$.

2.c La courbe Γ étant parcourue dans le sens direct :

$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma\rho^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}1+2\cos\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\pi+0+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

3.a $\overrightarrow{OI(\theta)}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM(\theta)}+\overrightarrow{OM(\theta+\pi)}\right)=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)\vec{u}_\theta-\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)\vec{u}_\theta=\cos\theta\vec{u}_\theta$ donc $I(\theta)\in\mathcal{C}$.

$\overrightarrow{I(\theta)M(\theta)}=\overrightarrow{I(\theta)O}+\overrightarrow{OM(\theta)}=\vec{u}_\theta$ donc $I(\theta)M(\theta)=1$.

3.b $\overrightarrow{OJ(\theta)}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega J(\theta)}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\overrightarrow{\Omega I(\theta)}=\vec{i}-\overrightarrow{OI(\theta)}=(1-\cos^2\theta)\vec{i}-\cos\theta\sin\theta\vec{j}=-\sin\theta\vec{v}_\theta$.

3.c $J(\theta)=M(\theta)\Leftrightarrow\overrightarrow{OJ(\theta)}=\overrightarrow{OM(\theta)}\Leftrightarrow 1+\cos\theta=0$ et $\sin\theta=0\Leftrightarrow\theta=0\quad[\pi]$.

3.d $\overrightarrow{J(\theta)M(\theta)}=\overrightarrow{J(\theta)O}+\overrightarrow{OM(\theta)}=(1+\cos\theta)\vec{u}_\theta+\sin\theta\vec{v}_\theta$.

La tangente en $M(\theta)$, régulier est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)=\rho'(\theta)\vec{u}_\theta+\rho(\theta)\vec{v}_\theta=-\sin\theta\vec{u}_\theta+(1+\cos\theta)\vec{v}_\theta$.

Les vecteurs $\overrightarrow{J(\theta)M(\theta)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ sont orthogonaux.

3.e On choisit un point $I(\theta)$ ($=I(\theta+\pi)$) sur ce cercle $\mathcal{C}$ autre que O.

A la distance 1 de ce point, et sur la droite $(OI(\theta))$ on positionne les points $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$.

En introduisant $J(\theta)$, point diamétralement opposé à $I(\theta)$ sur $\mathcal{C}$, on peut construire les normales à Γ en $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ puis les tangentes en ces points.