I Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U.

(Q1) a) Posons $\forall x \in I$, $h(x) = e^{-ax} y(x)$. h est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I.

$\forall x \in I$, $h'(x) = -a e^{-ax} y(x) + e^{-ax} y'(x) = e^{-ax}(y'(x) - a y(x))$.

$\forall x \in I$, $h'(x) = e^{-ax}(y'(x) - a y(x))$.

* Supposons que y est solution du problème (E_f)

Alors $\forall x \in I$, $h'(x) = e^{-ax}(-f(x))$. Donc h est une primitive de $t \mapsto -e^{-at} f(t)$ sur l'intervalle I. Notons que $x \mapsto -\int_1^x e^{-at} f(t)\,dt$ est également une primitive de $t \mapsto -e^{-at} f(t)$ sur I car cette dernière fonction est continue sur I.

Ainsi $\exists K \in \mathbb{R}$, $h(x) = -\int_1^x e^{-at} f(t)\,dt + K$ pour tout x dans I car I est un intervalle.

Alors $\forall x \in I$, $e^{-ax} y(x) = K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt$.

$\forall x \in I$, $y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$.

* Réciproquement soit K un réel et soit g l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I$, $g(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$.

$x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I car c'est la primitive sur l'intervalle I de la fonction continue $t \mapsto e^{-at} f(t)$ qui prend la valeur 0 en 1.

Alors $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt$ sont de classe C^1 sur I.

Par produit g est de classe C^1 sur I.

De plus $\forall x \in I$, $g'(x) = a e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right) + e^{ax}\left(0 - e^{-ax} f(x)\right)$.

$\forall x \in I$, $g'(x) = a g(x) - f(x)$.

g est donc de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) - a g(x) + f(x) = 0$.

Donc g est solution du problème (E_f).

Une application y de I dans $\mathbb{R}$ est solution du problème (E_f) si et seulement si :

$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right).$

b) Supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E_f) bornées sur I.

$\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, \ y_1(x) = e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$ et $y_2(x) = e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$.

$\exists (M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, \ |y_1(x)| \leq M_1$ et $|y_2(x)| \leq M_2$. car y_1 et y_2 sont bornées sur I.

$\forall x \in I, \ y_1(x) - y_2(x) = (K_1 - K_2) e^{ax}$

$\forall x \in I, \ |(K_1 - K_2) e^{ax}| = |y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x)| + |y_2(x)| \leq M_1 + M_2.$

$\forall x \in I, \ |K_1 - K_2| e^{ax} \leq M_1 + M_2$. $\forall x \in I, \ |K_1 - K_2| \leq (M_1 + M_2) e^{-ax}$

En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient $|K_1 - K_2| \leq 0$ car $a > 0$.

Alors $0 \leq |K_1 - K_2| \leq 0$; $|K_1 - K_2| = 0$; $K_1 - K_2 = 0$; $K_1 = K_2$; $y_1 = y_2$!

S'il existe une solution de (E_f) bornée sur I elle est unique.

c) • $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I

• $\exists M_f \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in I, \ 0 \leq |e^{-at} f(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq M_f e^{-at}$ car f est bornée sur I.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-at}\,dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_1^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}(e^{-a} - e^{-ax})\right) = \frac{e^{-a}}{a}$ donc

$\int_1^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge et vaut $\frac{e^{-a}}{a}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |e^{-at} f(t)|\,dt$.

$\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

d) $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ converge.

Ainsi pour tout élément x de I, $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ converge.

g est bien définie sur I. Posons $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$.

$\forall x \in I,\ g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt + \int_x^{1} e^{-at} f(t)\,dt \right)$.

$\forall x \in I,\ g(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^{x} e^{-at} f(t)\,dt \right)$. <u>$g$ est donc solution de (E_f).</u>

f est bornée sur I donc $\exists M_f \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in I$, $|e^{-at} f(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq M_f\, e^{-at}$.

Nous avons vu que $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ est absolument convergente. Alors pour tout $x \in I$, $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall x \in I,\ |g(x)| = \left| e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt \right| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt \right| \underset{x \leq +\infty\,!}{\leq} e^{ax} \int_x^{+\infty} |e^{-at} f(t)|\,dt$

Or $\forall t \in I$, $|e^{-at} f(t)| \leq M_f e^{-at}$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge pour tout x dans I (car $\int_1^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge).

Alors $\forall x \in I,\ |g(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} M_f e^{-at}\,dt = e^{ax} M_f \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_x^A$

$\forall x \in I,\ |g(x)| \leq e^{ax} M_f \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{a} \left(e^{-ax} - e^{-aA} \right) \right] = e^{ax} M_f \frac{1}{a} e^{-ax} = \frac{1}{a} M_f$.

<u>$\forall x \in I,\ |g(x)| \leq \frac{1}{a} M_f$.</u> <u>$g$ est bornée sur I.</u>

g est solution de (E_f) et g est bornée sur I.

Alors <u>$g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I.</u>

Remarque.. L'unicité aurait pu être traitée autrement et faire apparaître naturellement la solution proposée en d).
Reprenons donc b). Faisons une analyse.

Supposons que y est une fonction de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, bornée sur I et solution du problème (E_f).

Alors $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$.

Ainsi $\forall x \in I$, $\int_1^x e^{-at} f(t)\,dt = K - y(x) e^{-ax}$.

y est bornée sur I donc $\exists M \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$!!), $\forall x \in I$, $|y(x)| \leq M$.

Donc $\forall x \in I$, $0 \leq |y(x) e^{-ax}| \leq M e^{-ax}$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} (M e^{-ax}) = 0$ car $a > 0$.

Par encadrement $\lim_{x \mapsto +\infty} (y(x) e^{-ax}) = 0$.

Alors $\lim_{x \mapsto +\infty} \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt = \lim_{x \mapsto +\infty} (K - y(x) e^{-ax}) = K$.

Par conséquent 1) $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ existe et vaut K

2) $y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right) = e^{ax}\left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$

pour tout x dans I.

Alors $\forall x \in I$, $y(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$.

Ceci montre bien que si (E_f) admet une solution bornée sur I elle est unique

(Q2) a) Supposons que $f=1$. $f\in E$! calcul fait dans Q 1 d)

$\forall x\in I,\ U(f)(x)= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,1\,dt \overset{\downarrow}{=} e^{ax}\,\frac{1}{a}\,e^{-ax} = \frac{1}{a}.$

Si $f=1$: $U(f)=\frac{1}{a}$.

b) * Soit f dans E. $U(f)$ est la solution de (E_f) bornée sur I.

Donc $U(f)$ est bornée et de classe C^1 sur I.

Alors $U(f)$ est continue et bornée sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. $U(f)\in E$.

$\forall f\in E,\ U(f)\in E$.

* Soit $(f,g)\in E^2$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in I,\ U(\lambda f+g)(x)= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}(\lambda f+g)(t)\,dt = e^{ax}\int_x^{+\infty}(\lambda e^{-at}f(t)+e^{-at}g(t))\,dt$

$\forall x\in I,\ U(\lambda f+g)(x)= \lambda\, e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt + e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}g(t)\,dt$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall x\in I,\ U(\lambda f+g)(x)=\lambda U(f)(x)+U(g)(x)=(\lambda U(f)+U(g))(x).$

$U(\lambda f+g)=\lambda U(f)+U(g)$. U est linéaire.

Finalement U est un endomorphisme de E.

c) Soit $f\in \operatorname{Ker} U$. $U(f)$ est solution de (E_f) et $U(f)=0_E$.

Alors $\forall x\in I,\ (U(f))'(x)-a\,U(f)(x)+f(x)=0.$

$\forall x\in I,\quad 0-a\times 0+f(x)=0.$

$\forall x\in I,\quad f(x)=0.\quad f=0_E.$

Ainsi $\operatorname{Ker} U=\{0_E\}$. U est injectif.

Remarque.- U n'est pas surjectif car $\operatorname{Im} U\subset E\cap C^1(I)\subsetneq E$.

Par exemple $t \mapsto \dfrac{1}{1+|t-2|}$ est continue et bornée sur I mais n'est pas dérivable en 2 ; ainsi elle appartient à E sans appartenir à $I \cap U$.

d) Faisons une récurrence surtout sans fixer f !

Autrement dit montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\forall f \in E}$, $\forall x \in I$, $U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)dt$

(et non pas $\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \dots$).

$*$ La propriété est vraie pour $n=0$ par définition de U.

$*$ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Notons qu'alors $\forall f \in E, \forall x \in I$, $U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)dt$.

Soit $f \in E$.

$U^{n+2}(f) = U^{n+1}(U(f))$ et $U(f) \in E$. Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $U(f)$ donne :

$\forall x \in I$, $U^{n+2}(f)(x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)dt$.

Effectuons une intégration par parties. Fixons x dans I. Soit $A \in I$.

- $u : t \mapsto \dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ est de classe C^1 sur I et $\forall t \in I$, $u'(t) = \dfrac{(t-x)^n}{n!}$.
- Posons $\forall t \in I$, $v(t) = e^{-at} U(f)(t)$. v est de classe C^1 sur I comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur I.

$\forall t \in I$, $v'(t) = -ae^{-at}U(f)(t) + e^{-at}(U(f))'(t) = e^{-at}\left((U(f))'(t) - aU(f)(t)\right)$

Or $U(f)$ est solution de (E_f).

Donc $\forall t \in I$, $v'(t) = e^{-at}(-f(t)) = -e^{-at}f(t)$.

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)\,dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U(f)(t)\right]_x^A - \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\left(-e^{-at}f(t)\right)dt .$$

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)\,dt = \frac{(A-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-aA} U(f)(A) + \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\,dt .$$

- $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{(A-x)^{n+1}e^{-aA}}{(n+1)!} = 0$ par croissance comparée $(a>0)$ et $U(f)$ est bornée sur I donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{(A-x)^{n+1}e^{-aA}}{(n+1)!} U(f)(A)\right) = 0$.

- De plus $\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)\,dt$ converge par hypothèse de récurrence.

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\,dt$ converge.

et $\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\,dt$.

Donc $U^{n+1}(U(f))(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\,dt$.

$U^{n+2}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\,dt$ et ceci pour tout x dans I.

ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall f\in E, \ U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\,dt$.

Q3 cas des fonctions exponentielles.

a) Soit $\ell\in\mathbb{R}_+$. f_ℓ est continue sur I et $\forall x\in I$, $0\le f_\ell(x)\le 1$.

f_ℓ est continue et bornée sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f_\ell\in E$. calcul déjà fait...

$\forall x\in I$, $U(f_\ell)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\ell(t)\,dt = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+\ell)t}\,dt = \frac{e^{ax}e^{-(a+\ell)x}}{a+\ell}$.

$\forall x \in I, \quad U(f_k)(x) = \frac{1}{a+k} e^{-kx} = \frac{1}{a+k} f_k(x).$

$\forall k \in \mathbb{R}^+, \quad f_k \in E$ et $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.$

b) Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$. $0 < \lambda \leq \frac{1}{a}$. $a \leq \frac{1}{\lambda}$; $0 \leq \frac{1}{\lambda} - a$.

Posons $k = \frac{1}{\lambda} - a$. $k \in \mathbb{R}^+$.

$f_k \in E$, $f_k \neq 0_E$ et $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k = \frac{1}{a + \frac{1}{\lambda} - a} f_k = \lambda f_k.$

Alors $f_k \in E$, $f_k \neq 0_E$ et $f_k \in \mathrm{Ker}(U - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Donc $\mathrm{Ker}(U - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

$\forall \lambda \in]0, \frac{1}{a}], \; \mathrm{Ker}(U - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ ou $]0, \frac{1}{a}] \subset \mathrm{Sp}\, U$.

c) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \; U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k$.

← comme récurrence immédiate.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad U^n(f_k)(x) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n e^{-kx}.$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{a+k}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ 1 & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases}$$

Alors $\forall x \in I, \quad \lim_{n \to +\infty} U^n(f_k)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ e^{-kx} & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases}$

(Q4) Cas des fonctions cosinus et sinus.

cos et sin sont dans E car elles sont bornées et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) $U(\cos)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \cos t \, dt$ et $U(\sin)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \sin t \, dt$ et

ceci pour tout x dans I. Essayons de gagner un peu de temps pour ne pas faire quatre intégrations par parties... mais traitons le cas général.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \cos(\alpha t+\beta)e^{-at}$ est continue sur I.

Soit $x \in I$ et $A \in I$. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_x^A \cos(\alpha t+\beta)e^{-at}dt = \left[\cos(\alpha t+\beta)\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)\right]_x^A - \int_x^A(-\alpha\sin(\alpha t+\beta))\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)dt.$$

$$\int_x^A \cos(\alpha t+\beta)e^{-at}dt = -\frac{1}{a}\cos(\alpha A+\beta)e^{-aA} + \frac{1}{a}\cos(\alpha x+\beta)e^{-ax} - \frac{\alpha}{a}\int_x^A \sin(\alpha t+\beta)e^{-at}dt \quad ⊙$$

$t \mapsto \cos(\alpha t+\beta)$ et $t \mapsto \sin(\alpha t+\beta)$ sont continues et bornées sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ce sont donc des éléments de E. Cela assure la convergence de $\int_x^{+\infty}\cos(\alpha t+\beta)e^{-at}dt$ et

$\int_x^{+\infty}\sin(\alpha t+\beta)e^{-at}dt$.

De plus $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}\cos(\alpha A+\beta)e^{-aA}\right)=0$ car $a>0$ et $A\mapsto -\frac{1}{a}\cos(\alpha A+\beta)$ est bornée sur I.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans ⊙ il vient :

$$\underline{\int_x^{+\infty}\cos(\alpha t+\beta)e^{-at}dt = \frac{1}{a}\cos(\alpha x+\beta)e^{-ax} - \frac{\alpha}{a}\int_x^{+\infty}\sin(\alpha t+\beta)e^{-at}dt.}$$

Pour $\alpha=1$ et $\beta=0$ on obtient $\int_x^{+\infty}\cos t\, e^{-at}dt = \frac{1}{a}\cos x\, e^{-ax} - \frac{1}{a}\int_x^{+\infty}\sin t\, e^{-at}dt$.

Pour $\alpha=-1$ et $\beta=\frac{\pi}{2}$ on obtient $\int_x^{+\infty}\sin t\, e^{-at}dt = \frac{1}{a}\sin x\, e^{-ax} + \frac{1}{a}\int_x^{+\infty}\cos t\, e^{-at}dt$.

Alors $\int_x^{+\infty}\cos t\, e^{-at}dt = \frac{1}{a}\cos x\, e^{-ax} - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\sin x\, e^{-ax} + \frac{1}{a}\int_x^{+\infty}\cos t\, e^{-at}dt\right]$ <u>et</u>

$$\int_x^{+\infty}\sin t\, e^{-at}dt = \frac{1}{a}\sin x\, e^{-ax} + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\cos x\, e^{-ax} - \frac{1}{a}\int_x^{+\infty}\sin t\, e^{-at}dt\right].$$

Donc $\int_x^{+\infty}\cos t\, e^{-at}dt = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}}\left[\frac{1}{a}\cos x\, e^{-ax} - \frac{1}{a^2}\sin x\, e^{-ax}\right]$ <u>et</u>

$$\int_x^{+\infty}\sin t\, e^{-at}dt = \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}}\left[\frac{1}{a}\sin x\, e^{-ax} + \frac{1}{a^2}\cos x\, e^{-ax}\right].$$

$U(\cos)(x) = e^{ax}\dfrac{a^2}{a^2+1}\left[\dfrac{a}{a^2}\cos x\, e^{-ax} - \dfrac{1}{a^2}\sin x\, e^{-ax}\right] = \dfrac{1}{a^2+1}(a\cos x - \sin x)$ et

$U(\sin)(x) = e^{ax}\dfrac{a^2}{a^2+1}\left[\dfrac{a}{a^2}\sin x\, e^{-ax} + \dfrac{1}{a^2}\cos x\, e^{-ax}\right] = \dfrac{1}{a^2+1}(a\sin x + \cos x)$.

donc $\underline{\underline{U(\cos) = \dfrac{1}{a^2+1}(a\cos - \sin) \text{ et } U(\sin) = \dfrac{1}{a^2+1}(a\sin + \cos)}}$.

Avec $a=1$ il vient : $U(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin)$ et $U(\sin) = \frac{1}{2}(\sin + \cos)$.

b) $U(P) = U(\text{Vect}(\cos, \sin)) = \text{Vect}(U(\cos), U(\sin))$.

or d'après a), $U(\cos)$ et $U(\sin)$ sont dans P. Par conséquent

$\text{Vect}(U(\cos), U(\sin))$ est contenu dans P car P est un sous-espace vectoriel de E

donc $\underline{\underline{U(P) \subset P \text{ et } P \text{ est stable par } U.}}$

$(\sin, \cos)$ est une famille génératrice de P par définition de P.

montrons que cette famille est libre. soient α et β deux réels tels que

$\alpha \sin + \beta \cos = 0_E$. $\forall x \in I$, $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$.

donc $\alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = \alpha \sin \pi + \beta \cos \pi = 0$; $\alpha = -\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$.

ceci achève de montrer la liberté de la famille $(\sin, \cos)$.

<u>$(\sin, \cos)$ est une base de P</u>

d'après a) $\underline{\underline{\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \Pi = \dfrac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ dans le cas général.}}}$

c] $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$; $M^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

$M^3=MM^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

$M^4=MM^3=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}I_2$.

$M^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $M^3=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $M^4=-\frac{1}{4}I_2$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $M^{4n}=(M^4)^n=\left(-\frac{1}{4}I_2\right)^n=\left(-\frac{1}{4}\right)^nI_2$; $M^{4n+1}=M\times M^{4n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^nM$;

$M^{4n+2}=M^2M^{4n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^nM^2$; $M^{4n+3}=M^3M^{4n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^nM^3$. Ainsi :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $M^{4n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $M^{4n+1}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$, $M^{4n+2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix}0&-1/2\\1/2&0\end{pmatrix}$ et

$M^{4n+3}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

Reprenons le cas général. $M=\frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix}a&-1\\1&a\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+1}\left(aI_2+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

Posons $C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. $M=\frac{1}{a^2+1}(aI_2+C)$. Notons que aI_2 et C commutent.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n=\frac{1}{(a^2+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(aI_2)^{n-k}C^k=\frac{1}{(a^2+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}C^k$.

$C^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $C^{2k}=(-1)^kI_2$ et $C^{2k+1}=(-1)^kC$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n=\frac{1}{(a+1)^n}\left[\sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}a^{n-2k}(-1)^kI_2+\sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}a^{n-(2k+1)}(-1)^kC\right]$

$(a+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} i^k = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} (-1)^k + i \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1} a^{n-(2k+1)} (-1)^k.$

donc $\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} (-1)^k = \mathrm{Re}\left((a+i)^n\right) = \frac{1}{2}\left[(a+i)^n + (a-i)^n\right]$ et

$\sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1} a^{n-(2k+1)} (-1)^k = \mathrm{Im}\left((a+i)^n\right) = \frac{1}{2i}\left[(a+i)^n - (a-i)^n\right].$

donc $$M^n = \frac{1}{(a+1)^n}\left[\frac{(a+i)^n + (a-i)^n}{2} I_2 + \frac{(a+i)^n - (a-i)^n}{2i}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Exercice.- Déduire de cela les résultats obtenus pour $a = 1$.

Donnons une seconde piste pour retrouver M^n dans le cas général et pour montrer également que les coefficients de M^n tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$$M = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}.$$

$\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 = 1$. Alors $\exists\, \theta \in [0, 2\pi[$, $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \sin\theta \end{cases}$

Notons que $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} > 0$ et $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} > 0$. Alors $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Dans ces conditions $\theta = \arccos \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ (resp. $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$).

Notons également que pour $a = 1$: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Alors $M = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n \begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$.

* C'est clair pour $n=1$ (et même pour $n=0$).
* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n \begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$M^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^{n+1} \begin{pmatrix}\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta & -\cos n\theta\sin\theta - \sin n\theta\cos\theta\\ \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta & -\sin n\theta\sin\theta + \cos n\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$M^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^{n+1} \begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta\\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta\end{pmatrix}.$$ Ceci achève la récurrence.

$$(\blacktriangle)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad M^n = \begin{pmatrix}\dfrac{\cos n\theta}{(\sqrt{1+a^2})^n} & -\dfrac{\sin(n\theta)}{(\sqrt{1+a^2})^n}\\ \dfrac{\sin(n\theta)}{(\sqrt{1+a^2})^n} & \dfrac{\cos(n\theta)}{(\sqrt{1+a^2})^n}\end{pmatrix}$$ avec $\theta = \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

(resp. $\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left|\frac{\cos(n\theta)}{(\sqrt{1+a^2})^n}\right| = \frac{|\cos(n\theta)|}{(\sqrt{1+a^2})^n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n$

De même $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left|\frac{\sin(n\theta)}{(\sqrt{1+a^2})^n}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n$.

Or $\left|\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right| < 1$ car $a > 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n = 0$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n\theta}{(\sqrt{1+a^2})^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n\theta}{(\sqrt{1+a^2})^n} = 0$.

La limite de tous les coefficients de M^n lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.

Exercices 1. Retrouver avec $(\blacktriangle)$ les résultats obtenus pour $a = 1$.
2.. Déduire $(\blacktriangle)$ du M^n de la p 12... et réciproquement.

3.. Montrer avec les résultats de la page 11 que les coefficients de M^n tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque $a=1$.

Q5 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\varphi_n : t\mapsto e^{-t}t^n$ est continue sur I et $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(e^{-t}t^n)=0$ par croissance comparée. Ceci suffit pour dire que φ_n est bornée sur I, non ?

φ_n est bornée et continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc φ_n appartient à E et ceci pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit x et A deux éléments de I. Une intégration par parties simple donne : $\int_x^A e^{-at}\varphi_n(t)\,dt=\int_x^A e^{-(a+1)t}t^n\,dt=\left[-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1}t^n\right]_x^A-\int_x^A\left(-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1}\right)nt^{n-1}dt.$

$$\int_x^A e^{-at}\varphi_n(t)dt=-\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)A}A^n+\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)x}x^n+\frac{n}{a+1}\int_x^A e^{-at}\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

$\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\left(-\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)A}A^n\right)=0$ par croissance comparée $(a+1>0)$.

De plus $\int_x^{+\infty}e^{-at}\varphi_n(t)dt$ et $\int_x^{+\infty}e^{-at}\varphi_{n-1}(t)dt$ convergent car φ_n et φ_{n-1} sont des éléments de E. Alors $\int_x^{+\infty}e^{-at}\varphi_n(t)dt=\frac{1}{a+1}e^{-ax}\varphi_n(x)+\frac{n}{a+1}\int_x^{+\infty}e^{-at}\varphi_{n-1}(t)dt$

En multipliant par e^{ax} on obtient : $U(\varphi_n)(x)=\frac{1}{a+1}\varphi_n(x)+\frac{n}{a+1}U(\varphi_{n-1})(x).$

Donc $\forall x\in I$, $\psi_n(x)=\frac{1}{a+1}\varphi_n(x)+\frac{n}{a+1}\psi_{n-1}(x).$

$$\psi_n=\frac{1}{a+1}\varphi_n+\frac{n}{a+1}\psi_{n-1}.$$

b) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, F_p est stable par U.

* $U(F_0) = U(\mathrm{Vect}(\varphi_0)) = \mathrm{Vect}(U(\varphi_0))$.

Or $\forall t \in I$, $\varphi_0(t) = e^{-t} = f_1(t)$ (notation de Q3 a)).

Donc $U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{a+1} f_1 = \frac{1}{a+1}\varphi_0$.

$U(F_0) = \mathrm{Vect}(U(\varphi_0)) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{a+1}\varphi_0\right) = \mathrm{Vect}(\varphi_0) = F_0$ donc $U(F_0) \subset F_0$!

* Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

$U(F_{p+1}) = U(\mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})) = \mathrm{Vect}(U(\varphi_0), U(\varphi_1), \dots, U(\varphi_{p+1}))$.

$\forall k \in [\![0,p]\!]$, $U(\varphi_k) \in F_p$ grâce à l'hypothèse de récurrence.

donc $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $U(\varphi_k) \in F_{p+1}$ car $F_p \subset F_{p+1}$.

$U(\varphi_{p+1}) = \frac{1}{a+1}\varphi_{p+1} + \frac{n}{a+1} U(\varphi_p)$

Or $U(\varphi_p) \in F_p$ donc $U(\varphi_p) \in F_{p+1}$. De plus $\varphi_{p+1} \in F_{p+1}$.

Ainsi $U(\varphi_{p+1})$ est combinaison linéaire de deux éléments de F_{p+1}.

Comme F_{p+1} est un sous-espace vectoriel : $U(\varphi_{p+1}) \in F_{p+1}$.

Donc $\forall k \in [\![0,p+1]\!]$, $U(\varphi_k) \in F_{p+1}$

Alors $U(F_{p+1}) = \mathrm{Vect}(U(\varphi_0), U(\varphi_1), \dots, U(\varphi_{p+1})) \subset F_{p+1}$. Ceci achève la récurrence.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, $F_p = \mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U.

⚠ Suite p. 17

Si $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ base de F

c) $p = 2$. Nous venons de voir que $U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0$

D'après a) $U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{a+1} U(\varphi_0)$ et $U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1} U(\varphi_1)$.

Alors $U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0$.

$$U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \left(\frac{1}{1+a}\right)^2 \varphi_0 .$$

$$U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}\varphi_1 + \left(\frac{1}{1+a}\right)^2\varphi_0\right) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{(a+1)^2}\varphi_1 + \frac{2}{(1+a)^3}\varphi_0$$

Ainsi $T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$.

Posons $b = \frac{1}{a+1}$ $\quad T_2 = \begin{pmatrix} b & b^2 & 2b^3 \\ 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & b & 2b^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T_2 = b\left(I_3 + \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Posons $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$T_2 = b(I_3 + J_3)$. I_3 et J_3 commutent donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_2^n = b^n \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} J_3^{\ell}.$$

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons $n \geq 2$ $\quad T_2^n = b^n\left(I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right)$

$$T_2^n = b^n\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

<u>Notons que ceci vaut encore pour $n = 0$ et $n = 1$.</u>

$$T_2^n = b^n \begin{pmatrix} 1 & nb & n(n+1)b^2 \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n & nb^{n+1} & n(n+1)b^{n+2} \\ 0 & b^n & nb^{n+1} \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. avec $b = \frac{1}{1+a}$.

$|b| = \left|\frac{1}{1+a}\right| = \frac{1}{1+a} < 1$ car $a > 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}(nb^{n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n(n+1)b^{n+2}) = 0$.

La limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.

---

suite et fin de Q5b.

Montrons que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de F_p pour tout p dans $\mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition de F_p, $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille génératrice de F_p. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k \varphi_k = 0_E$.

$\forall x \in I$, $\sum\limits_{l=0}^{p} \alpha_l e^{-x} x^l = 0$. $\forall x \in I$, $\sum\limits_{l=0}^{p} \alpha_l x^l = 0$.

Alors le polynôme $\sum\limits_{l=0}^{p} \alpha_l X^l$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Ce qui achève de montrer la liberté de la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Donc $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de F_p.

(Q6) Soit f un élément de E et soit $x \in I$.

Soit $A \in I$. $t \mapsto t-x$ est de classe C^1 sur I ce qui justifie le changement de variable $u = t-x$ dans ce qui suit.

$$\int_x^A e^{-at} f(t)\,dt = \int_0^{A-x} e^{-a(u+x)} f(u+x)\,du = e^{-ax}\int_0^{A-x} e^{-au} f(x+u)\,du.$$

$\lim\limits_{A \to +\infty} (A-x) = +\infty$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,du$ converge et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = e^{-ax}\int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,du$.

$$U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = e^{ax} e^{-ax}\int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u)\,du.$$

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\,dt.$$

(Q7) a) Soit f un élément de E. f est continue et bornée sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il en est de même pour $|f|$. Ainsi $|f|$ appartient à E.

Soit $x \in I$. Soit $A \in [x, +\infty[$.

$$\left|\int_x^A e^{-at} f(t)\,dt\right| \leq \int_x^A |e^{-at} f(t)|\,dt = \int_x^A e^{-at} |f(t)|\,dt.$$

Or $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\,dt$ convergent. Donc :

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt\right| \leq \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\,dt.$$

$e^{ax} \geq 0$

$$|U(f)(x)| = \left|e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt\right| = e^{ax}\left|\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt\right| \leq e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\,dt = U(|f|)(x).$$

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\quad |U(f)(x)| \leq U(|f|)(x). \text{ ou } \forall f \in E,\ |U(f)| \leq U(|f|).$$

b) V1 φ est à valeurs positives donc $|\varphi| = \varphi$. Alors $0 \leq |U(\varphi)| \leq U(|\varphi|) = U(\varphi)$ car $\varphi \in E$

donc $U(\varphi)$ est à valeurs positives.

V2 φ est un élément de E tel que $\forall x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$. Posons $\psi = U(\varphi)$.

Soit $x \in I$. $\forall t \in [x, +\infty[$, $e^{-at}\varphi(t) \geq 0$

Donc $\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt \geq 0$ ($x \leq +\infty$!). Or $e^{ax} \geq 0$ donc

$\psi(x) = U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt \geq 0$.

Si φ est un élément de E à valeurs positives, $\psi = U(f)$ est à valeurs positives.

c) Supposons φ décroissante sur I

Soit $x \in I$. $\forall t \in [x, +\infty[$, $\varphi(t) \leq \varphi(x)$ et $e^{-at} \geq 0$.

$\forall t \in [x, +\infty[$, $e^{-at}\varphi(t) \leq e^{-at}\varphi(x)$ calcul déjà fait.

Alors $\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt \leq \varphi(x)\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \varphi(x) \times \frac{e^{-ax}}{a}$ et $e^{ax} \geq 0$

Ainsi $U(\varphi)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt \leq e^{ax}\varphi(x)\frac{e^{-ax}}{a} = \frac{1}{a}\varphi(x)$.

Alors $a\,\psi(x) = a\,U(\varphi)(x) \leq \varphi(x)$.

$\forall x \in I$, $a\,\psi(x) \leq \varphi(x)$.

$\forall x \in I$, $\psi'(x) - a\,\psi(x) + \varphi(x) = 0$ par définition de $\psi = U(\varphi)$.

$\forall x \in I$, $\psi'(x) = a\,\psi(x) - \varphi(x) \leq 0$. ψ est décroissante sur I.

Si φ est décroissante sur I, $\psi = U(\varphi)$ est décroissante sur I.

Q8 Notons que si f est un élément de E_1, $f' \in E$.

On peut également aisément démontrer que E_1 est un sous-espace

vectoriel de E.

a) Soit f un élément de E_1. Soit x dans I et soit A dans I.

$u : t \mapsto f(x+t)$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-at}}{a}$ sont de classe C^1 sur I

$\forall t \in I$, $u'(t) = f'(x+t)$ et $v'(t) = e^{-at}$. En intégrant par parties il vient alors

$$\int_0^A e^{-at} f(x+t)\,dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} f(x+t)\right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{e^{-at}}{a}\right) f'(x+t)\,dt.$$

$$a\int_0^A e^{-at} f(x+t)\,dt = -e^{-aA} f(x+A) + f(x) + \int_0^A e^{-at} f'(x+t)\,dt.$$

f et f' sont dans E donc $\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at} f'(x+t)\,dt$ convergent et valent respectivement $U(f)(x)$ et $U(f')(x)$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} (-e^{-aA} f(x+A)) = 0$ car $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-aA} = 0$ et f est bornée sur I.

Alors $a\,U(f)(x) = 0 + f(x) + U(f')(x)$ et ceci pour tout x dans I.

$\forall f \in E_1,\ a\,U(f) = f + U(f')$.

b) Soit $f \in E_1$. $(U(f))' - a\,U(f) + f = 0_E$ par définition de $U(f)$.

donc $(U(f))' = a\,U(f) - f = f + U(f') - f = U(f')$.

$\forall f \in E_1,\ D(U(f)) = U(D(f))$.

c) Soit f un élément de E_1. Supposons que f est à valeurs positives et décroissante.

$-D(f)$ est positive sur I et ainsi $U(-D(f))$ est positive sur I.

d'après 7 b) (rappelons que $-D(f) \in E$ car $f \in E_1$).

Alors $D(U(f)) = U(D(f)) = -U(-D(f))$ est négative sur I.

Donc $U(f)$ est décroissante sur I.

II Comportement asymptotique de $V(f)$ au voisinage de $+\infty$

Q1) Résultats préliminaires.

u) Notons que α est continue sur I. De plus:

1) $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ donc $|\alpha(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o(|\beta(x)|) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$

2) $\forall x \in I$, $|\alpha(x)| \geq 0$ et $\beta(x) \geq 0$.

3) $\int_1^{+\infty} \beta(t)dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} |\alpha(t)|\, dt$ converge. $\int_1^{+\infty} \alpha(t)dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$. Ainsi $\exists A_1 \in I$, $\exists \varepsilon_1 \in \mathcal{F}([A_1, +\infty[; \mathbb{R})$,

$\forall x \in [A_1, +\infty[$, $\alpha(x) = \varepsilon_1(x) \times \beta(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_1(x) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists A \in [A_1, +\infty[$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $|\varepsilon_1(x)| \leq \varepsilon$ car

$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_1(x) = 0$.

Alors $\forall t \in [A, +\infty[$, $|\alpha(t)| = |\varepsilon_1(t)||\beta(t)| \leq \varepsilon |\beta(t)| = \varepsilon \beta(t)$.

Alors $\forall x \in [A, +\infty[$, $\forall t \in [x, +\infty[$, $|\alpha(t)| \leq \varepsilon \beta(t)$.

Donc $\int_x^{+\infty} |\alpha(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$ pour tout x dans $[A, +\infty[$ (car $\int_1^{+\infty} |\alpha(t)|dt$ et $\int_1^{+\infty} \beta(t)\, dt$ convergent).

Donc $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)\, dt\right| \leq \int_x^{+\infty} |\alpha(t)|\, dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$ pour tout x dans $[A, +\infty[$

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in [1, +\infty[$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt\right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$, Rappelons que β est continue et strictement positive sur I.

Alors $\forall x \in I$, $\int_x^{+\infty} \beta(t)dt > 0$.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in [1,+\infty[$, $\forall x \in [A,+\infty[$, $\left| \dfrac{\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t)dt} \right| \leq \varepsilon$

donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t)dt} = 0$.

Ainsi $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right)$.

b) $\alpha(x) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \beta(x)$. Donc 1/ $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \mapsto +\infty}{=} o(\beta(x))$.

2/ $\alpha - \beta$ et β sont continues sur I, β est strictement positive et

$\int_x^{+\infty} \beta(t)dt$ converge

On peut donc appliquer ce qui précède et dire que :

$$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t))dt \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t))dt$ et $\int_x^{+\infty} \beta(t)dt$ convergent pour tout x dans I.

Alors pour tout x dans I $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt$ converge et

$$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt = \int_x^{+\infty} \alpha(t)dt - \int_x^{+\infty} \beta(t)dt.$$

Alors $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt - \int_x^{+\infty} \beta(t)dt \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right)$

ce qui donne : $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$.

Q2 Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.

Supposons que $f \in E$ et que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = b$. $(b\in\mathbb{R})$.

1er cas.. $b=0$. $f(t) \underset{t\mapsto+\infty}{=} o(1)$.

Ainsi $e^{-at}f(t) \underset{t\mapsto+\infty}{=} o(e^{-at})$.

$t \to e^{-at}f(t)$ et $t\mapsto e^{-at}$ sont continues sur I

$t\mapsto e^{-at}$ est strictement positive sur I

$\int_1^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge.

Alors Q1 donne : $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}dt\right) \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-ax}}{x}\right)$.

donc $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x}{e^{-ax}}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt\right)=0$; $\lim_{x\mapsto+\infty}\left(x\,U(f)(x)\right)=0$.

Or $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x}=0$. Par produit il vient alors $\lim_{x\mapsto+\infty} U(f)(x) = 0$.

2ème cas.. b est quelconque. Posons $\hat{f}=f-b$

$\hat{f}\in E$, $\lim_{x\mapsto+\infty}\hat{f}(x)=0$. Alors $\lim_{x\mapsto+\infty} U(\hat{f})(x)=0$.

$U(\hat{f}) = U(f)-U(b) = U(f)-b\,U(1) = U(f)-b\,U(f_0) = U(f) - \frac{b}{a+0}f_0$.

$\forall x\in I$, $U(f)(x) = U(\hat{f})(x)+\frac{b}{a}$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} U(f)(x) = 0+\frac{b}{a}$. Notons que le résultat du 2ème cas vaut dans le 1er cas.

$\forall b\in\mathbb{R}$, $\forall f\in E$, $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\mapsto+\infty} U(f)(x)=\frac{b}{a}$.

(Q3) Cas des fonctions puissances.

Notons que f_ω est continue et bornée sur I ($\forall t \in I$, $0 \leq f_\omega(t) \leq 1$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi f_ω appartient à E.

a) $\boxed{V1}$ Soit $x \in I$ et soit $A \in I$. En intégrant par parties il vient aisément

$$\int_x^A e^{-at} f_\omega(t)\,dt = \int_x^A e^{-at} t^{-\omega}\,dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} t^{-\omega}\right]_x^A - \int_x^A \left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)(-\omega t^{-\omega-1})\,dt$$

$$\int_x^A e^{-at} f_\omega(t)\,dt = -\frac{1}{a} e^{-aA} \frac{1}{A^\omega} + \frac{e^{-ax}}{a} \frac{1}{x^\omega} - \frac{\omega}{a} \int_x^A e^{-at} f_{\omega+1}(t)\,dt.$$

$\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\,dt$ et $\int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t)\,dt$ convergent et $\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{a} e^{-aA} \frac{1}{A^\omega}\right) = 0.$

Alors $\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\,dt = \frac{1}{a} e^{-ax} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t)\,dt.$

En multipliant par e^{ax} on obtient :

$U(f_\omega)(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} U(f_{\omega+1})(x).$

$g_\omega(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x).$

$\forall x \in I$, $g_\omega(x) = \frac{1}{a} f_\omega(x) - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x).$

$\boxed{V2}$ IQ8 a donne immédiatement $aU(f_\omega) = f_\omega + U(f'_\omega)$. En remarquant que $f'_\omega = -\omega f_{\omega+1}$ il vient en utilisant la linéarité de U : $aU(f_\omega) = f_\omega - \omega U(f_{\omega+1})$ ce qui donne $a g_\omega = f_\omega - \omega g_{\omega+1}$ ou encore $g_\omega = \frac{f_\omega}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}$

$\frac{1}{t^{\omega+1}} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^\omega}\right)$; $e^{-at} f_{\omega+1}(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(e^{-at} f_\omega(t)\right)$

De plus $\forall t \in I$, $e^{-at} f_\omega(t) \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\,dt$ converge car $f_\omega \in E$

Alors d'après Q1 $\int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t)\,dt = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\,dt\right).$

Donc $\quad e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t)\,dt \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\,dt\right)$.

Ainsi $\quad g_{\omega+1}(x) \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(g_\omega(x)\right)$.

Alors $\quad \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x) \underset{x\mapsto+\infty}{=} o(g_\omega(x))$ donc $\quad g_\omega(x) + \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} g_\omega(x)$.

Donc $\quad \frac{f_\omega(x)}{a} = g_\omega(x) + \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} g_\omega(x)$.

$$\underline{\underline{g_\omega(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}}}.$$

<u>b)</u> Soit $t\in[1,+\infty[$. $e^{-at} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-at)^\ell}{\ell!}$. Soit $x\in I$.

Alors on aimerait montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt = \int_1^x \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\times\frac{1}{t}\,dt = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\int_1^x \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\times\frac{1}{t}\,dt$.

Il s'agit de montrer que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{\ell=0}^{n}\int_1^x \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\times\frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt$.

Ou que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\left(e^{-at} - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-at)^\ell}{\ell!}\right)dt = 0$.

$\varphi : t\mapsto e^t$ est de classe C^∞ sur $]-\infty,0]$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}=\varphi$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n en 0 donne :

$\forall u\in]-\infty,0]$, $\displaystyle\left|\varphi(u) - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{u^\ell}{\ell!}\varphi^{(\ell)}(0)\right| \leqslant \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{y\in[u,0]}|\varphi^{(n+1)}(y)|$

$\forall u\in]-\infty,0]$, $\displaystyle\left|\varphi(u) - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{u^\ell}{\ell!}\right| \leqslant \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{y\in[u,0]} e^y = \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Alors $\forall t\in[x,+\infty[$, $\displaystyle\left|e^{-at} - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-at)^\ell}{\ell!}\right| \leqslant \frac{|-at|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}$.

$\forall t\in[x,+\infty[$, $\displaystyle\left|\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-at)^\ell}{\ell!}\frac{1}{t}\right| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}t^n$.

$x \geqslant 1$ donc

$$\left|\int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\frac{1}{t}\right)dt\right| \leqslant \int_1^x \left|\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-at)^\ell}{\ell!}\frac{1}{t}\right|dt \leqslant \int_1^x \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}t^n dt.$$

$$\left|\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt - \sum_{\ell=0}^{n}\int_1^x \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\frac{1}{t}dt\right| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x = \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}(x^{n+1}-1) \leqslant \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ car la série de terme général $\frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!}$ converge et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!\,n+1} = 0.$

Il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{n}\int_1^x \frac{(-at)^\ell}{\ell!}\frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt.$

$$\int_1^x \frac{(-at)^0}{0!}\frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^x \frac{(-at)^k}{k!}\frac{1}{t}dt = \frac{(-a)^k}{k!}\int_1^x t^{k-1}dt = \frac{(-a)^k}{k!}\,\frac{x^k-1}{k}.$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln x + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-a)^k}{k!}\frac{x^k-1}{k}\right] = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt.$

$$\ln x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^\ell \frac{a^\ell}{\ell\,\ell!}(x^\ell-1) = \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt.$$

Alors 1°) la série de terme général $(-1)^\ell \frac{a^\ell}{\ell\,\ell!}(x^\ell-1)$ converge.

2°) $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt = \ln x + \sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^\ell \frac{a^\ell}{\ell\,\ell!}(x^\ell-1).$

Ceci pour tout x dans I

$$\forall x \in I,\ g_1(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt = e^{ax}\left[-\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt\right]$$

$$\forall x \in I,\ g_1(x) = e^{ax}\left[-\ln x - \sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^\ell \frac{a^\ell}{\ell\,\ell!}(x^\ell-1) + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt\right].$$

Q4 Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω –

a) Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f \underset{+\infty}{=} o(f_\omega)$.

1/ $e^{-ax} f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{-ax} f_\omega(x))$

2/ $x \mapsto e^{-ax} f(x)$ et $x \mapsto e^{-ax} f_\omega(x)$ sont continues sur I

3/ $\forall x \in I$, $e^{-ax} f_\omega(x) > 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt$ converge ($f_\omega \in E$).

Alors $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt\right)$ d'après II Q1

donc $e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t)\, dt\right)$.

Ainsi $U(f) \underset{+\infty}{=} o(U(f_\omega))$

Si ω est un réel strictement positif et si $f \underset{+\infty}{=} o(f_\omega)$ alors $U(f) \underset{+\infty}{=} o(U(f_\omega))$

ou $g \underset{+\infty}{=} o(g_\omega)$.

b) Soit ω un réel strictement positif. Supposons $f \underset{+\infty}{\sim} f_\omega$

$f - f_\omega \in E$ et $f - f_\omega \underset{+\infty}{=} o(f_\omega)$

donc $U(f - f_\omega) \underset{+\infty}{=} o(U(f_\omega))$; $g - g_\omega = U(f) - U(f_\omega) = U(f - f_\omega) \underset{+\infty}{=} o(g_\omega)$

Ainsi $g \underset{+\infty}{\sim} g_\omega$. Or $g_\omega \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega}{a}$; , donc $g \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega}{a} \sim \dfrac{f}{a}$.

Si ω est un réel strictement positif et si $f \underset{+\infty}{\sim} f_\omega$: $U(f) = g \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f}{a}$.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)(t)dt$

Q1 Etudes d'exemples

a) Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. $g_k = U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$ d'après I Q3

Nous avons largement vu que $\int_1^{+\infty} e^{-kt}dt$ existe et vaut $\frac{e^{-k}}{k}$.

donc $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt$ converge. Alors $\underline{\underline{\int_1^{+\infty} g_k(t)dt \text{ converge}}}$.

b) Soit $\omega\in\mathbb{R}_+^*$. $g_\omega \underset{+\infty}{\sim} \frac{f_\omega}{a}$ et $\forall t\in I$, $\frac{f_\omega(t)}{a}\geqslant 0$.

Alors $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty}\frac{f_\omega(t)}{a}dt$ donc que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\omega}$.

Ainsi $\underline{\underline{\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt \text{ converge si et seulement si } \omega > 1}}$.

Q2

a) Notons que F (resp. G) est la primitive de f (resp. g) sur l'intervalle I qui prend la valeur 0 à 1.

Posons $\forall x\in I$, $\ell(x) = G'(x) - aG(x) + F(x) = g(x) - aG(x) + F(x)$.

ℓ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $\ell'(x) = g'(x) - a g(x) + f(x) = 0$
$\uparrow$ $g = U(f)$ est solution de (E_1).

ℓ est alors constante sur l'intervalle I.

De plus $\ell(1) = g(1) - aG(1) + F(1) = g(1)$.

Alors $\forall x\in I$, $\ell(x) = g(1)$

$\underline{\underline{\forall x\in I,\ G'(x) - aG(x) = -F(x) + g(1)}}$.

b) F est de classe C^1 sur I car c'est une primitive d'une fonction continue sur I.

Alors F est largement continue sur I.

$\forall t \in I$, $f(t) \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\forall x \in J$, $0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Alors $\forall x \in I$, $0 \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

F est continue sur I, bornée sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\underline{\underline{F \in E.}}$

Posons $\forall x \in I$, $H(x) = U(F)(x) - \frac{g(1)}{a}$.

H est dérivable sur J et $\forall x \in I$, $H'(x) - a\,H(x) = \underbrace{(U(F))'(x) - a\,U(F)(x)}_{-F(x)} + g(1)$

Alors $H' - aH = -F + g(1) = G' - aG$

Donc $(G-H)' - a(G-H) = 0$. $G-H$ est solution de l'équation différentielle

$y' - ay = 0$. Alors $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(G-H)(x) = K e^{ax}$

Donc $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $G(x) = K e^{ax} + H(x)$

$\underline{\underline{\exists K \in \mathbb{R}, \ \forall x \in J, \ G(x) = K e^{ax} + (U(F))(x) - \frac{g(1)}{a}.}}$

c) g est bornée sur J. $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in I$, $|g(x)| \leq C$.

$\forall x \in J$, $\left|\frac{G(x)}{x}\right| = \frac{1}{x} \left|\int_1^x g(t)\,dt\right| \underset{x \geq 1}{\leq} \frac{1}{x} \int_1^x |g(t)|\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^x C\,dt = \frac{x-1}{x} C \leq C$.

$\underline{\underline{x \mapsto \frac{G(x)}{x} \text{ est bornée sur } I.}}$

d) $\forall x \in I$, $K = e^{-ax} G(x) - e^{-ax} U(F)(x) + \frac{g(1)}{a} e^{-ax}$. ①

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-ax} G(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x e^{-ax} \frac{G(x)}{x} \right) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x e^{-ax}) = 0$ par

croissance comparée $\underline{\underline{\text{et}}}$ $x \to \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur J.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-ax} U(F)(x)) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-ax} = 0$ et $U(F)$ est bornée sur I.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(1)}{a} e^{-ax} \right) = 0$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans ⊙ il vient : $\underline{K = 0}$.

Alors $\underline{G = U(F) - \frac{g(1)}{a}}$.

Remarque. Ce résultat est clair dès que l'on a montré que $F \in E$. En effet si $F \in E$:

$G' - aG = -F + g(1)$. $G = \frac{1}{a}(G' + F - g(1)) = \frac{1}{a}(g + F - g(1))$

$G = \frac{1}{a}(g - (U(F))' + aU(F) - g(1)) = U(F) - \frac{1}{a} g(1)$; d'où le résultat !

$(U(F))' - aU(F) + F = 0$ $\qquad (U(F))' = U(F') = U(f) = g$.

e) $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. Comme $U(F)$ est bornée sur I : $\underline{G \text{ est bornée sur } I}$.

Remarque. Cela est clair dès que $F \in E$ car $G = \frac{1}{a}(G' + F - g(1)) = \frac{1}{a}(g + F - g(1))$!

En particulier $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in I$, $G(x) \leq M$. $\forall x \in I$, $\int_1^x g(t)\,dt \leq M$

Alors g est continue et positive sur I et $x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est majorée sur I

donc $\underline{\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ converge}}$.

Q3 Soit $f \in E$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente. Alors $|f| \in E$, $|f|$ est à valeurs positives et $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. D'après 2 $\int_1^{+\infty} U(|f|)(t)\,dt$ converge.

Or $\forall t \in I$, $0 \leq |U(f)(t)| \leq U(|f|)(t)$.

Alors $\int_1^{+\infty} |U(f)|(t)\,dt$ converge.

Ainsi $\underline{\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ est absolument convergente}}$.

Si $F \in E$, g et F sont bornées et ainsi G est bornée.

et montrent que l'on a beaucoup compliqué les choses...