PARTIE I

Q1 a) et b) $AX=0$. $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j=0$

Soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$. $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j=0$

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}x_j.$$

$\forall j\in[\![1,n]\!]$, $|x_j|\leq|x_{i_0}|$ et $|a_{i_0,j}|\geq 0$

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}|=|a_{i_0,i_0}x_{i_0}|=\Big|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}x_j\Big|\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0,j}||x_j|\leq|x_{i_0}|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0,j}|.$$

Alors $|x_{i_0}|\Big[|a_{i_0,i_0}|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0,j}|\Big]\leq 0$.

Or par hypothèse $|a_{i_0,i_0}|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0,j}|>0$ et $|x_{i_0}|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|>0$ car $X\neq 0$

donc $|x_{i_0}|\Big[|a_{i_0,i_0}|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0,j}|\Big]>0$. Les hypothèses $AX=0$ et $X\neq 0$ donnent une contradiction.

c) Par conséquent $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX=0\Rightarrow X=0$. A est inversible.

Q2 a) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ qui n'appartient pas à D.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda\notin D_i$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}-\lambda|=|\lambda-a_{i,i}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}|$.

Posons $B=(b_{i,j})=A-\lambda I_n$.

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad b_{i,j}=\begin{cases}a_{i,i}-\lambda & \text{si } i=j\\ a_{i,j} & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|b_{i,i}|=|a_{i,i}-\lambda|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|b_{i,j}|$. B est donc une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante. Ainsi $B=A-\lambda I_n$ est inversible donc λ n'est pas valeur propre.

Ainsi, si λ n'appartient pas à D, λ n'est pas valeurs propres de A.

Par conséquent si λ est valeur propre de A, λ appartient à D.

Le spectre de A est contenu dans D.

b)

p2 et 3 !

```
Program ESSEC_2009;

const Dimmax=10;

type Matrice=array[1..DimMax,1..DimMax] of real;
     tableau=array[1..DimMax] of real;


procedure EntreMatrice(n:integer; var A:Matrice);

var i,j:integer;

begin

for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
    begin
    write('Donner le coefficient de la ligne ',i,' et de la colonne ',j,' ');
    readln(A[i,j]);
    end;



end;


Function Rayon(n:integer; A: matrice; var R:tableau) : real;

var i,j:integer;

begin

for i:=1 to n do
    begin
    R[i]:=0;
    for j:=1 to n do
    if i <>j then R[i]:=R[i]+abs(A[i,j])
    end;


end;




var n,i:integer;A:matrice; s: real; R:tableau;


begin

n:=3;

EntreMatrice(n,A);


s:=rayon(n,A,R);

For i:=1 to n do
    begin
    writeln('r',i,'=',R[i]);
    end;
end.
```

c) i) A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à coefficients réels donc A est diagonalisable.

ii) Notons r_1, r_2 et r_3 les rayons de D_1, D_2 et D_3.

$r_1 = |-1|+|0| = 1$; $r_2 = |-1|+|-1| = 2$ et $r_3 = |0|+|-1| = 1$.

Ainsi $D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|\leq 1\} \cup \{z\in\mathbb{C} \mid |z-2|\leq 2\} \cup \{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|\leq 1\}$.

$D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|\leq 1 \text{ ou } |z-2|\leq 2\}$

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-1|\leq 1$.

$|z-2| = |(z-1)+(-1)| \leq |z-1|+|-1| \leq 1+1 = 2$.

Donc $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|\leq 1\} \subset \{z\in\mathbb{C} \mid |z-2|\leq 2\}$.

Alors $\underline{\underline{D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-2|\leq 2\}}}$.

Alors $Sp\,A \subset \{z\in\mathbb{C} \mid |z-2|\leq 2\}$. A étant symétrique à coefficients réels, $Sp\,A \subset \{x\in\mathbb{R} \mid |x-2|\leq 2\}$.

Or $\{x\in\mathbb{R} \mid |x-2|\leq 2\} = \{x\in\mathbb{R} \mid -2\leq x-2\leq 2\} = \{x\in\mathbb{R} \mid 0\leq x\leq 4\} = [0,4]$.

<u>Les valeurs propres de A sont contenues dans l'intervalle $[0,4]$ de $\mathbb{R}$.</u>

iii) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x-y = \lambda x\\ -x+2y-z = \lambda y\\ -y+z = \lambda z\end{cases} \iff \begin{cases} y = (1-\lambda)x = (1-\lambda)z\\ -x+(2-\lambda)y-z = 0\end{cases}$$

<u>1er cas : $\lambda = 1$.</u> $AX = \lambda X \iff \begin{cases} y = 0\\ x = -z\end{cases}$

1 est valeur propre de A et $SEP(A,1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right)$.

<u>2ème cas.. $\lambda \neq 1$</u>

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y=(1-\lambda)x \\ -x+(2-\lambda)y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=(1-\lambda)x \\ 0=x\left[-2+(2-\lambda)(1-\lambda)\right]=x\,\lambda(\lambda-3) \end{cases}$$

<u>a) $\lambda=0$</u> $\quad AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=x \end{cases}$.

0 est valeur propre de A et $SEP(A,0)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

<u>b) $\lambda=3$</u> $\quad AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases}$

3 est valeur propre de A et $SEP(A,3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

<u>c) $\lambda\neq 0$ et $\lambda\neq 3$</u> $\quad AX=\lambda X \Leftrightarrow x=y=z=0 \Leftrightarrow X=0$. λ n'est pas valeur propre de A.

Finalement <u>$Sp\,A=\{0,1,3\}$</u>. <u>$SEP(A,0)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$</u>, <u>$SEP(A,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$</u>

et <u>$SEP(A,3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$</u>.

$M_{3,1}(\mathbb{R})=SEP(A,0)\oplus SEP(A,1)\oplus SEP(A,3)$, $\mathcal{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,0)$,

$\mathcal{B}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,1)$ et $\mathcal{B}_3=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,3)$.

Alors $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 0, 1, 3.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

1°/ $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $\qquad$ 2°.. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

<u>Remarques</u> 1.. $P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&2\\3&0&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$

2.. $SEP(A,0)$, $SEP(A,1)$ et $SEP(A,3)$ sont orthogonaux donc $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 3$.

$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$, $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$ et $\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6}$.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associées aux valeurs propres $0, 1, 3$. Soit $\hat{P}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\hat{\mathcal{B}}$.

1) $\hat{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ ou $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

2) $\hat{P}$ est orthogonale car $\mathcal{B}_0$ et $\hat{\mathcal{B}}$ sont orthonormées.

3) $\hat{P}^{-1} A \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q3 a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \underset{\substack{\uparrow \\ a_{i,i}>0 \text{ et } a_{i,j}\leq 0 \text{ si } i\neq j}}{=} a_{i,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (-a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0.$$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$. <u>A est à diagonale strictement dominante.</u>

Ainsi <u>A est inversible</u> (I Q1).

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX ait toutes ses coordonnées positives ou nulles.

Posons $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soit i_0 dans $[\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$.

$$0 \leq y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\, x_j = a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}\, x_j \leq a_{i_0,i_0} x_{i_0} + x_{i_0} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}$$

$$\begin{cases} a_{i_0,j} \leq 0 \text{ si } j\neq i_0 \\ x_{i_0} \leq x_j \end{cases}$$

donc $0 \leq x_{i_0}\left[a_{i_0,i_0} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}\right] = x_{i_0} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j}$.

Or $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j} > 0$ donc $x_{i_0} \geq 0$. Alors $0 \leq x_{i_0} = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geq 0}}$.

c) Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} donc $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = A^{-1}E_j$.

Alors $A\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = AA^{-1}E_j = E_j$. $\underline{\underline{A\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = E_j}}$ **où E_j est le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

d) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Les coordonnées de $A\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$ sont positives ou nulles

donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ b_{i,j} \geq 0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,n]\!],\ b_{i,j} \geq 0$

Les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

c) Posons $A_\alpha = (b_{ij})$.

- $b_{1,1} = 1+\alpha > 0$, $b_{2,2} = 2+\alpha > 0$ et $b_{3,3} = 1+\alpha > 0$
- $b_{1,2} = -1$, $b_{1,3} = 0$, $b_{2,1} = -1$, $b_{2,3} = -1$, $b_{3,1} = 0$, $b_{3,2} = -1$.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^3$, $i \neq j \Rightarrow b_{i,j} \leq 0$.

- $\sum_{j=1}^{3} b_{1,j} = \alpha > 0$, $\sum_{j=1}^{3} b_{2,j} = \alpha > 0$ et $\sum_{j=1}^{3} b_{3,j} = \alpha > 0$.

Donc A_α vérifie (P).

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $A_\alpha X = X'$

$$\begin{cases} (1+\alpha)x - y = x' \\ -x + (2+\alpha)y - z = y' \\ -y + (1+\alpha)z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{1+\alpha}(x'+y) \\ z = \frac{1}{1+\alpha}(z'+y) \\ y' = -\frac{1}{1+\alpha}(x'+y) + (2+\alpha)y - \frac{1}{1+\alpha}(z'+y). \end{cases}$$

Alors $(1+\alpha)y' + x' + z' = y\,[-2 + (1+\alpha)(2+\alpha)]$; $y = \frac{1}{\alpha(\alpha+3)}\left[x' + (1+\alpha)y' + z'\right]$.

$$x = \frac{1}{1+\alpha}\left[x' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)}x' + \frac{(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+3)}y' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)}z'\right] = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}\left[(\alpha^2+3\alpha+1)x' + (\alpha+1)y' + z'\right]$$

$$z = \frac{1}{1+\alpha}\left[z' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)}x' + \frac{1+\alpha}{\alpha(\alpha+3)}y' + \frac{1}{\alpha(\alpha+3)}z'\right] = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}\left[x' + (\alpha+1)y' + (\alpha^2+3\alpha+1)z'\right]$$

Ainsi $$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}\begin{pmatrix} \alpha^2+3\alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & (\alpha+1)^2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha^2+3\alpha+1 \end{pmatrix}$$

partie II : convergence de suites de matrices.

(Q1) a) * Supposons que $(X_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers X. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} x_i^{(\ell)}=x_i$

$\forall \ell\in\mathbb{N}$, $n(X_\ell-X)=\max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i^{(\ell)}-x_i|$.

Alors $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $0\leq n(X_\ell-X)\leq \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(\ell)}-x_i|$.

De plus $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty}|x_i^{(\ell)}-x_i|=0$ donc $\lim\limits_{\ell\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(\ell)}-x_i|=0$.

On obtient alors par encadrement : $\lim\limits_{\ell\to+\infty} n(X_\ell-X)=0$.

* Réciproquement supposons $\lim\limits_{\ell\to+\infty} n(X_\ell-X)=0$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$\forall \ell\in\mathbb{N}$, $0\leq|x_i^{(\ell)}-x_i|\leq n(X_\ell-X)$. Par encadrement il vient $\lim\limits_{\ell\to+\infty}|x_i^{(\ell)}-x_i|=0$.

$\lim\limits_{\ell\to+\infty}x_i^{(\ell)}=x_i$ et ceci pour tout i dans $[\![1,n]\!]$. Ainsi $(X_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers X.

<u>$(X_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers X si et seulement si $\lim\limits_{\ell\to+\infty} n(X_\ell-X)=0$.</u>

b) * Supposons que $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty}m_{i,j}^{(\ell)}=m_{i,j}$ donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty}|m_{i,j}^{(\ell)}-m_{i,j}|=0$

Alors $\lim\limits_{\ell\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|m_{i,j}^{(\ell)}-m_{i,j}|=0$ donc $\lim\limits_{\ell\to+\infty}s(M_\ell-M)=0$.

* Réciproquement supposons que $\lim\limits_{\ell\to+\infty}(M_\ell-M)=0$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

$\forall \ell\in\mathbb{N}$, $0\leq|m_{i,j}^{(\ell)}-m_{i,j}|\leq\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{\ell=1}^{n}|m_{j,\ell}^{(\ell)}-m_{j,\ell}|=s(M_\ell-M)$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{\ell\to+\infty}|m_{i,j}^{(\ell)}-m_{i,j}|=0$.

donc $\lim\limits_{\ell\to+\infty}m_{i,j}^{(\ell)}=m_{i,j}$ et ceci pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$; $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

Ainsi <u>$(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si $\lim\limits_{\ell\to+\infty}s(M_\ell-M)=0$.</u>

c] $M=(m_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=MX$.

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ |y_i|=\left|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|m_{i,j}||x_j| \leqslant m(X)\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|.$

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ |y_i|\leqslant m(X)\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}| \underset{\uparrow}{\leqslant} m(X)\,s(M).$

$m(X)\geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n}|m_{i,j}|\leqslant \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|m_{\ell,j}|=s(M)$

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ |y_i|\leqslant m(X)\,s(M).$

Donc $\quad m(MX)=m(Y)=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|y_i|\leqslant m(X)\,s(M).$

<u>$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad m(MX)\leqslant m(X)\,s(M).$</u>

d] Soit $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\quad \lim_{\ell\to+\infty} s(M_\ell-M)=0 \quad$ (II Q 1 b]).

Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall\ell\in\mathbb{N},\ 0\leqslant m(M_\ell X-MX)=m((M_\ell-M)X)\overset{\text{II Q 1 c]}}{\leqslant} m(X)\,s(M_\ell-M)$

Par encadrement on obtient $\lim_{\ell\to+\infty} m(M_\ell X-MX)=0$. II Q 1 a] permet de dire que $(M_\ell X)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers MX.

<u>Si la suite $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(M_\ell X)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers MX.</u>

e] Soit $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(M_\ell X)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers MX. Montrons que $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

"On pose": $M=(m_{i,j})$ et pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$, $M_\ell=(m_{i,j}^{(\ell)})$.

Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

La suite $(M_k E_j)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ME_j.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k E_j$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de M_k, et ME_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.

$$\forall k\in\mathbb{N},\ M_k E_j = \begin{pmatrix} m_{1,j}^{(k)} \\ m_{2,j}^{(k)} \\ \vdots \\ m_{n,j}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ et } ME_j = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Comme $(M_k E_j)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ME_j : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} m_{i,j}^{(k)} = m_{i,j}$.

Finalement $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} m_{i,j}^{(k)} = m_{i,j}$.

Ainsi $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Si pour tout élément X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(M_k X)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers MX alors $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

F] Soient $M=(m_{i,j})$ et $N=(n_{i,j})$ deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$. $MN \in M_n(\mathbb{R})$.

Posons $MN = (t_{i,j})$.

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad |t_{i,j}| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, n_{\ell,j}\right| \leq \sum_{\ell=1}^{n} |m_{i,\ell}|\,|n_{\ell,j}|$$

$$\text{Alors } S(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} |m_{i,\ell}|\,|n_{\ell,j}|$$

$$S(MN) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left[|m_{i,\ell}| \sum_{j=1}^{n} |n_{\ell,j}|\right]$$

Or $\forall (i,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, $|m_{i,\ell}| \geq 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} |n_{\ell,j}| \leq \sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |n_{r,j}| = S(N)$

Donc $\forall (i,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, $|m_{i,\ell}| \sum\limits_{j=1}^{n} |n_{\ell,j}| \leq |m_{i,\ell}|\, S(N)$.

Donc $S(MN) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left[|m_{i,\ell}|\sum_{j=1}^{n}|n_{\ell,j}|\right] \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left[|m_{i,\ell}|S(N)\right] = S(N)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}|m_{i,\ell}|$

Ainsi $S(MN) \leq S(N)\,S(M) = S(M)\,S(N)$.

$\forall (M,N)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\quad S(MN)\leq S(M)S(N)$.

g) Soient $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $Y+Z=\begin{pmatrix} y_1+z_1\\ y_2+z_2\\ \vdots\\ y_n+z_n\end{pmatrix}$.

$\forall i\in [\![1,n]\!],\quad |y_i+z_i|\leq |y_i|+|z_i| \leq m(Y)+m(Z)$.

$\forall i\in [\![1,n]\!],\quad |y_i+z_i|\leq m(Y)+m(Z)$ donc $\max_{i\in[\![1,n]\!]}|y_i+z_i|\leq m(Y)+m(Z)$.

Alors $m(Y+Z)\leq m(Y)+m(Z)$.

$\forall (Y,Z)\in(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\quad m(Y+Z)\leq m(Y)+m(Z)$.

Soient Y et Z deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$m(Y) = m((Y-Z)+Z) \leq m(Y-Z)+m(Z)$; $m(Y)-m(Z)\leq m(Y-Z)$.

$m(Z) = m((Z-Y)+Y) \leq m(Z-Y)+m(Y)$; $m(Z)-m(Y)\leq m(Z-Y) = m(Y-Z)$

Alors $m(Y)-m(Z)\leq m(Y-Z)$ et $-(m(Y)-m(Z))\leq m(Y-Z)$ donc $|m(Y)-m(Z)|\leq m(Y-Z)$.

$\forall (Y,Z)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad |m(Y)-m(Z)|\leq m(Y-Z)$.

Q2 a) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$M_k^{-1}-M^{-1} = M^{-1}(MM_k^{-1}-I_n) = M^{-1}(M-M_k)M_k^{-1}$.

Donc $M_k^{-1}X-M^{-1}X = (M_k^{-1}-M^{-1})(X) = (M^{-1}(M-M_k))(M_k^{-1}X)$

Alors $m(M_k^{-1}X-M^{-1}X) = m\left((M^{-1}(M-M_k))(M_k^{-1}X)\right) \underset{\text{c II Q1 c}}{\leq} S(M^{-1}(M-M_k))\,m(M_k^{-1}X)$

$m(M_k^{-1}X-M^{-1}X)\leq S(M^{-1})S(M-M_k)\,m(M_k^{-1}X)$ (II Q1 f) et $m(M_k^{-1}X)\geq 0$).

$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \; m(M_\ell^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})\, s(M - M_\ell)\, m(M_\ell^{-1}X).$

Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$m(M_\ell^{-1}X) - m(M^{-1}X) \leq |m(M_\ell^{-1}X) - m(M^{-1}X)| \overset{\text{II Q1g)}}{\leq} m(M_\ell^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M-M_\ell)m(M_\ell^{-1}X).$$

Alors $m(M_\ell^{-1}X)\big(1 - s(M^{-1})s(M-M_\ell)\big) \leq m(M^{-1}X)$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \; m(M_\ell^{-1}X)\big(1 - s(M^{-1})s(M-M_\ell)\big) \leq m(M^{-1}X).$

b) $(M_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers M donc $\lim\limits_{\ell \to +\infty} s(M_\ell - M) = 0$.

Alors $\lim\limits_{\ell \to +\infty} \big(1 - s(M^{-1})s(M_\ell - M)\big) = 1$.

Donc $\exists \ell_0 \in \mathbb{N}, \forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \; 1 - s(M^{-1})s(M_\ell - M) \geq \frac{1}{2}$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\forall \ell \in \mathbb{N}, \; m(M_\ell^{-1}X) \geq 0$.

Donc $\forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \; \frac{1}{2} m(M_\ell^{-1}X) \leq m(M_\ell^{-1}X)\big(1 - s(M^{-1})s(M_\ell - M)\big) \leq m(M^{-1}X)$.

Donc $\forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \quad m(M_\ell^{-1}X) \leq 2\, m(M^{-1}X)$.

$\exists \ell_0 \in \mathbb{N}, \forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \; m(M_\ell^{-1}X) \leq 2\, m(M^{-1}X).$

c) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \; 0 \leq m(M_\ell^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M-M_\ell)m(M_\ell^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M-M_\ell)2m(M^{-1}X)$$

II Q2b)
$s(M-M_\ell)s(M^{-1}) \geq 0$

$\forall \ell \in [\![\ell_0, +\infty[\![, \; 0 \leq m(M_\ell^{-1}X - M^{-1}X) \leq 2m(M^{-1}X)s(M^{-1})s(M-M_\ell)$.

Or $\lim\limits_{\ell \to +\infty} \big(2m(M^{-1}X)s(M^{-1})s(M-M_\ell)\big) = 0$ car $\lim\limits_{\ell \to +\infty} s(M-M_\ell) = 0$ puisque $(M_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers M. Par encadrement $\lim\limits_{\ell \to +\infty} m(M_\ell^{-1}X - M^{-1}X) = 0$. Ainsi :

$(M_\ell^{-1}X)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers $M^{-1}X$ et ceci pour tout X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) Pour tout X dans $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$, $(\Pi_k^{-1}X)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Pi^{-1}X$ donc, d'après II Q e), $(\Pi_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Π^{-1}.

(Q3) Pour tout k dans $\mathbb{N}$, Π_k vérifie la propriété (P) alors d'après I Q3, Π_k est inversible et les coefficients de Π_k^{-1} sont positifs ou nuls.

Π est inversible, pour tout k dans $\mathbb{N}$ Π_k est inversible et $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Π donc d'après II Q d $(\Pi_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Π^{-1}.

Posons $\forall k\in\mathbb{N}$, $\Pi_k^{-1}=(\alpha_{i,j}^{(k)})$ et $\Pi^{-1}=(\alpha_{i,j})$.

Nous venons de voir que
1) $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\alpha_{i,j}^{(k)}\geq 0$
2) $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_{i,j}^{(k)}=\alpha_{i,j}$

dans ces conditions $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j}\geq 0$.

Les coefficients de la matrice Π^{-1} sont positifs ou nuls.

(Q4) a) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un élément de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\\\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix}$

$$(AX|X)=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big)x_i.$$

$$(AX|X)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

$$(AX|X)=\sum_{j=1}^n a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j+\sum_{j=1}^n a_{n,j}x_nx_j$$

$$(AX|X)=2x_1^2-x_1x_2+\sum_{i=2}^{n-1}x_i(-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1})-x_nx_{n-1}+2x_n^2$$

$$(AX|X)=2\sum_{i=1}^n x_i^2-x_1x_2-x_{n-1}x_n-\sum_{i=2}^{n-1}x_ix_{i-1}-\sum_{i=2}^{n-1}x_ix_{i+1}.$$

$$(AX|X) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

$$(AX|X) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1} - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1} x_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1}.$$

$$(AX|X) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} (-2x_i x_{i-1}) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} \left((x_i - x_{i-1})^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2\right).$$

$$(AX|X) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}^2$$

$$(AX|X) = 2x_1^2 + 2x_n^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - x_1^2$$

$$(AX|X) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2.$$

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad (AX|X) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $(AX|X) = 0$.

$x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = 0$ donc $x_1^2 = x_n^2 = 0$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $(x_i - x_{i-1})^2 = 0$.

Alors $x_1 = x_n = 0$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $x_i - x_{i-1} = 0$.

donc $x_1 = x_n = 0$ et $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. A est inversible.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $A_\alpha = (a_{i,j}(\alpha))$.

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i}(\alpha) = 2 + \alpha > 0$.
- $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j}(\alpha) = a_{i,j}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } j \in \{i-1, i+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j}(\alpha) \leq 0$

- $\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(\alpha) = (2+\alpha) - 1 = 1+\alpha > 0$.

$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}(\alpha) = -1 + (2+\alpha) = 1+\alpha > 0$

$\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha) = -1 + (2+\alpha) + 1 = \alpha > 0$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha) > 0$.

ceci achève de montrer que pour tout réel α strictement positif A_α vérifie la propriété (P).

c) Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k = A + \frac{1}{k+1} I_n$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k = A_{\frac{1}{k+1}}$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, M_k vérifie la propriété (P) !

$\forall k \in \mathbb{N}$, $S(M_k - A) = S(\frac{1}{k+1} I_n) = \frac{n}{k+1}$; $\lim_{k \to +\infty} (S(M_k - A)) = 0$.

Donc $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A.

$(A_{\frac{1}{k+1}})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (P) et cette suite converge vers A.

d) A est inversible et A est limite d'une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (P).

D'après II Q 3 les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S)

Q1 a) Soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0.

Soit G la primitive de F sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$ et G est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$.

Notons encore que $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_0^x F(t)\,dt$.

On a aussi $\forall x \in [0,1]$, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = F(x)$ et $G''(x) = f(x)$.

* Supposons que u est solution du système (S).

$\forall x \in [0,1]$, $u''(x) = -f(x) = -G''(x)$. $[0,1]$ étant un intervalle :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -G'(x) + \alpha$. Alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$, $u(x) = -G(x) + \alpha x + \beta$.

$u(0) = 0$ donc $0 = -G(0) + \beta = \beta$ car $G(0) = 0$. $\beta = 0$.

$u(1) = 0$ donc $0 = -G(1) + \alpha$; $\alpha = G(1)$

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

Ceci montre que le système admet au plus une solution.

* Posons $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

- G et $x \mapsto G(1)x$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$
- $\forall x \in [0,1]$, $u'(x) = -G'(x) + G(1)$ et $u''(x) = -G''(x) = -f(x)$; $u'' = -f$
- $u(0) = -G(0) + G(1) \times 0 = -G(0) = 0$ et $u(1) = -G(1) + G(1) = 0$.

Donc u est solution du système.

Le système (S) admet une solution et une seule.

Rappelons que G est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$ et qu'il en est de même pour $x \mapsto G(1)x$. Ainsi la solution du système est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$

On peut donc très largement dire que (S) admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = -G(x) + G(1)x$.

b) Supposons f positive. Alors u'' est négative sur $[0,1]$ donc u' est décroissante sur $[0,1]$.

u est de classe C^2 sur $[0,1]$ et $u(0)=u(1)=0$. Ceci suffit très largement pour appliquer le théorème de Rolle et pour affirmer qu'il existe un réel x_0 appartenant à $]0,1[$ tel que $u'(x_0)=0$. Ceci ajouté à la décroissance de u' sur $[0,1]$ montre que $\forall x\in[0,x_0]$, $u'(x)\geq 0$ et $\forall x\in[x_0,1]$, $u'(x)\leq 0$.

Alors u est croissante sur $[0,x_0]$ et u est décroissante sur $[x_0,1]$.

$\forall x\in[0,x_0]$, $0=u(0)\leq u(x)$ et $\forall x\in[x_0,1]$, $u(x)\geq u(1)=0$.

u est donc positive sur $[0,1]$.

<u>Si f est positive sur $[0,1]$, la solution du système (S) est positive sur $[0,1]$</u>

c) $\forall x\in[0,1]$, $F(x)=\int_0^x 1\,dt = x$. $\forall x\in[0,1]$, $G(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$.

$\forall x\in[0,1]$, $\tilde{u}(x) = -G(x)+G(1)x = -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x$.

<u>$\forall x\in[0,1]$, $\tilde{u}(x) = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.</u> <u>$\sup_{[0,1]}\tilde{u} = \frac{1}{8}$.</u>

x	0		$1/2$		1
$\tilde{u}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\tilde{u}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

Q2 a) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 3 à u qui est de classe C^4 sur $[0,1]$ donne :

$$\forall y\in[0,1],\ \left|u(y)-u(x)-(y-x)u'(x)-\frac{(y-x)^2}{2}u''(x)-\frac{(y-x)^3}{3!}u'''(x)\right|\leq \frac{|y-x|^4}{4!}\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|u^{(4)}(t)|$$

Posons $M_4=\sup_{t\in[0,1]}|u^{(4)}(t)|=\max_{t\in[0,1]}|u^{(4)}(t)|$.

Alors $\forall y\in[0,1]$, $\left|u(y)-u(x)-(y-x)u'(x)-\frac{(y-x)^2}{2}u''(x)-\frac{(y-x)^3}{3!}u'''(x)\right|\leq\frac{|y-x|^4}{4!}M_4$ car

$\forall y\in[0,1]$, $\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|u^{(4)}(t)|\leq\max_{t\in[0,1]}|u^{(4)}(t)|=M_4$.

Comme $x-h \in [0,1]$ et $x+h \in [0,1]$:

$|u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{|h|^4}{4!} M_4 = \frac{h^4}{24} M_4$.

$|u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{|-h|^4}{4!} M_4 = \frac{h^4}{24} M_4$.

Rappelons que $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$, $|A+B| \leq |A|+|B|$

Alors $|u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq$ à

$|u(x+h) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x)| + |u(x-h) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)| \leq \frac{h^4}{24}M_4 + \frac{h^4}{24}M_4$

Alors $\underline{|u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2u''(x)| \leq \frac{h^4}{12} M_4 = \frac{h^4}{12} \sup_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|}$.

b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $x_i \in [0,1]$, $x_i - h = x_{i-1} \in [0,1]$ et $x_i + h = x_{i+1} \in [0,1]$.

Alors $|u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h) - h^2u''(x_i)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|$.

$|u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) - h^2u''(x_i)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|$

Donc $|h^2u''(x_i) - (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|$.

En divisant par h^2 qui est strictement positif on obtient :

$$\underline{\left|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}\left[u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right]\right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|}.$$

Deux petits mots sur la suite. On cherche à approximer $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_{n+1})$.
Notons que l'on a déjà $u(x_0) = u(x_{n+1}) = 0$ et que l'on connaît u'' qui vaut $-f$.
La majoration précédente amène à penser que pour n assez grand :

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right] \simeq u''(x_i) = -f(x_i)$$

L'idée est donc d'approcher $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n), u(x_{n+1})$ par des réels $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ tels que $u_0 = 0 = u_{n+1}$ et

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{h^2}\left[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right] = -f(x_i)$ ou

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i)$.

Il convient alors de trouver $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ tels que :

$u_0 = u_{n+1} = 0$ et $A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$ où A est la matrice de II Q3.

Il convient également de trouver un majorant de l'erreur que l'on commet lorsque l'on remplace $u(x_i)$ par u_i.

C'est ce qui est fait dans la suite.

Q3 a) $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{u}(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$, $\tilde{u}'(t) = -t + \frac{1}{2}$, $\tilde{u}''(t) = -1$ et $\tilde{u}'''(t) = \tilde{u}^{(4)}(t) = 0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left|-1 - \frac{1}{h^2}\left[\tilde{u}(x_{i-1}) - 2\tilde{u}(x_i) + \tilde{u}(x_{i+1})\right]\right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{t \in [0,1]} |\tilde{u}^{(4)}(t)|$.

ou $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left|-1 + \frac{1}{h^2}\left[-\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1})\right]\right| \leq 0$

ou $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $-\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1}) = h^2$

b) Observons que $\tilde{u}(x_0) = \tilde{u}(x_{n+1}) = 0$ car $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.

Alors $\begin{cases} 2\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_2) = h^2 \\ \forall i \in [\![2,n-1]\!],\ -\tilde{u}(x_{i-1}) + 2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i+1}) = h^2 \\ -\tilde{u}(x_{n-1}) + 2\tilde{u}(x_n) = h^2 \end{cases}$

ceci s'écrit matriciellement $A\begin{pmatrix}\tilde{u}(x_1)\\ \tilde{u}(x_2)\\ \vdots \\ \tilde{u}(x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h^2\\ h^2\\ \vdots\\ h^2\end{pmatrix}$

Ainsi $A\tilde{U} = h^2\tilde{F}$ donc $\frac{1}{h^2}A\tilde{U} = \tilde{F}$.

c) $\frac{1}{h^2}A\tilde{U} = \tilde{F}$ donc $\frac{1}{h^2}\tilde{U} = A^{-1}\tilde{F}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{h^2}\tilde{u}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \times 1$

Rappelons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\tilde{u}(x_i) \in [0, \frac{1}{8}]$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \leq \frac{1}{8h^2} = \frac{(n+1)^2}{8}$.

Q4 $V = A\begin{pmatrix}u_1 - u(x_1)\\ u_2 - u(x_2)\\ \vdots\\ u_n - u(x_n)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}u(x_1)\\ u(x_2)\\ \vdots\\ u(x_n)\end{pmatrix}$.

Or $A\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = AU = h^2F = h^2\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} = h^2\begin{pmatrix}-u''(x_1)\\ -u''(x_2)\\ \vdots\\ -u''(x_n)\end{pmatrix}$.

donc $V = h^2\begin{pmatrix}-u''(x_1)\\ -u''(x_2)\\ \vdots\\ -u''(x_n)\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}u(x_1)\\ u(x_2)\\ \vdots\\ u(x_n)\end{pmatrix}$.

donc $\begin{cases} v_1 = -h^2u''(x_1) - [2u(x_1) - u(x_2)] \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!],\ v_i = -h^2u''(x_i) - [-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})] \\ v_n = -h^2u''(x_n) - [-u(x_{n-1}) + 2u(x_n)] \end{cases}$

En remarquant que $u(x_0) = u(0) = 0$ et $u(x_{n+1}) = u(1) = 0$ ceci s'écrit

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = -[h^2u''(x_i) - (u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))]$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = -h^2[u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))]$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|v_i| = h^2 \left| u''(x_i) - \frac{1}{h^2}\left(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right)\right| \leqslant h^2 \times \frac{h^2}{12} \sup\limits_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)|$

Or $u^{(4)} = (u'')'' = -f''$. donc $\sup\limits_{t\in[0,1]} |u^{(4)}(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |-f''(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|v_i| \leqslant \frac{h^4}{12} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$.

$\Delta U = A^{-1}V$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\Delta u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} v_j$. car $V = A\Delta U$ donc $\Delta U = A^{-1}V$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\Delta u_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{i,j}||v_j| \quad \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \frac{h^4}{12} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}\right) \frac{h^4}{12} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$

les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\Delta u_i| \leqslant \frac{1}{8h^2} \frac{h^4}{12} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\Delta(u_i)| \leqslant \frac{h^2}{96} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$ ou $|u_i - u(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{96} \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)|$.

Q5 a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \cos x\, e^{\sin x}$ et $f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x) e^{\sin x}$.

$\forall x \in [0,1]$, $|f''(x)| \leqslant \left[|-\sin x| + |\cos^2 x|\right] e^{\sin x} \leqslant (1+1) e^{\sin x} \leqslant 2e^1$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\Delta(u_i)| \leqslant \frac{h^2}{96} \times 2e = \frac{h^2}{48} e = \frac{e}{48(n+1)^2}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\quad \leqslant 10^{-4}$ dès que $\frac{e}{48(n+1)^2} \leqslant 10^{-4}$.

$\frac{e}{48(n+1)^2} \leqslant 10^{-4} \iff \frac{10^4 e}{48} \leqslant (n+1)^2 \iff n+1 \geqslant \frac{100\sqrt{e}}{4\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{3}} \iff n \geqslant \frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1$

- $\frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1 \leqslant 24$ donc $n = 24$ garantit $|u_i - u(x_i)| \leqslant 10^{-4}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

- Avec la machine on obtient $\frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{3}} - 1 \simeq 22{,}797\ldots$ donc $n = 23$ convient.

b) $h : x \mapsto (x^2+x-1)e^x$ est dérivable sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $h'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x-1)e^x = (x^2+3x)e^x$.

$\forall x \in [0,1]$, $h'(x) \geq 0$. h est croissante sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $h(0) \leq h(x) \leq h(1)$.

$\forall x \in [0,1]$, $-1 \leq h(x) \leq e$. $\forall x \in [0,1]$, $|h(x)| \leq e$.

$\forall x \in [0,1]$, $f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x)e^{\sin x} = (-\sin x + 1 - \sin^2 x)e^{\sin x}$.

$\forall x \in [0,1]$, $\sin x \in [0,1]$ donc $\forall x \in [0,1]$, $f''(x) = -h(\sin x)$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $|f''(x)| = |-h(\sin x)| = |h(\sin x)| \leq e$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} e = \frac{e}{96(n+1)^2}$.

$\frac{e}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq \frac{10^4 e}{96} \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{100\sqrt{e}}{4\sqrt{6}} = 25\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow n \geq \frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{6}} - 1$

- A la main $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{6}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0,71$ et $25 \times 0,71 - 1 = 16,75$

donc si $n = 17$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|u_i - u(x_i)| \leq \frac{e}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4}$

$n = 17$ convient

- Avec la machine : $\frac{25\sqrt{e}}{\sqrt{6}} - 1 \simeq 15,83$. $n = 16$ convient.

<u>Remarque</u>. En étudiant f'' on a f'' décroissante sur $[0,1]$, $f''(0) = 1$ et

$f''(1) = (-\sin 1 + \cos^2 1)e^{\sin 1} \simeq -1,27482037$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $|f''(x)| \leq 1,28$.

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|u_i - u(x_i)| \leq \frac{1,28}{96(n+1)^2}$.

de plus $\frac{1,28}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4}$ pour $n \geq 100\sqrt{\frac{1,28}{96}} - 1 = 10\sqrt{\frac{128}{96}} - 1 = 10\sqrt{\frac{4}{3}} - 1 = \frac{20}{\sqrt{3}} - 1 \simeq 10,5$

donc $n = 11$ convient.