PARTIE I

Le programme autorise à identifier polynômes et fonctions polynômes.

Ainsi nous confondrons $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{P}_r$ et $\mathbb{R}_r[X]$ ... et sans doute x et X !

(Q1) a) • Soit $P \in \mathcal{P}$. $P(X+1)$ est encore un élément de $\mathcal{P}$ donc $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ appartient aussi à $\mathcal{P}$. <u>Δ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.</u>

• Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda \Delta P + \Delta Q$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{P}^2$, $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta P + \Delta Q$. <u>$\Delta$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.</u>

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\Delta X^k = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$; donc ΔX^k est de degré $k-1$. Notons aussi que $\Delta 1 = 1 - 1 = 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et P un élément de $\mathcal{P}$ de degré r. $\exists (a_0, a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $a_r \neq 0$

$\Delta P = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta X^k = \sum_{k=1}^{r} a_k \Delta X^k$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, ΔX^k est un polynôme de degré $k-1$

Alors 1) Pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, $a_k \Delta X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$ donc inférieur ou égal à $r-2$. (à un abus près si $r=1$).

2) $a_r \Delta X^r$ est un polynôme de degré $r-1$ car a_r n'est pas nul.

Ainsi ΔP est de degré $r-1$.

<u>Si P est un élément de $\mathcal{P}$ de degré r strictement positif, ΔP est de degré $r-1$.</u>

c) • Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. Supposons que le degré de P soit r et que r soit strictement positif. Alors ΔP est de degré $r-1$ donc ΔP n'est pas nul !

Ainsi $\deg P \leq 0$. $P \in \mathcal{P}_0$.

- Réciproquement supposons que $P \in \mathcal{P}_0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda$.

  $\Delta P = P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$, $P \in \operatorname{Ker} \Delta$.

  Ainsi $\forall P \in \mathcal{P}$, $P \in \operatorname{Ker} \Delta \Leftrightarrow P \in \mathcal{P}_0$.

$\operatorname{Ker} \Delta = \mathcal{P}_0$ ou $\operatorname{Ker} \Delta$ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

Q2 a) • Soit $P \in \mathcal{P}_r$. Notons que $\Delta_r P \in \mathcal{P}$ car $\Delta_r P = \Delta P$!

1er cas.. le degré de P est un entier k strictement positif. $k \leq r$.

Alors $\deg \Delta P = k-1$. Alors $\deg \Delta P \leq r-1 \leq r$.

Ainsi $\Delta_r P = \Delta P \in \mathcal{P}_r$ (et même à $\mathcal{P}_{r-1}$).

2e cas.. P est constant. Alors $\Delta_r P = \Delta P = 0$ donc $\Delta_r P \in \mathcal{P}_r$.

$\forall P \in \mathcal{P}_r$, $\Delta_r P \in \mathcal{P}_r$. Δ_r est bien une application de $\mathcal{P}_r$ dans $\mathcal{P}_r$

• Δ est linéaire donc Δ_r l'est également. Δ_r est linéaire.

Δ_r est un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$.

b) $\operatorname{Ker} \Delta_r = \{P \in \mathcal{P}_r \mid \Delta_r P = 0\} = \{P \in \mathcal{P}_r \mid \Delta P = 0\} \overset{\operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{P}_0}{=} \{P \in \mathcal{P}_r \mid P \in \mathcal{P}_0\} = \mathcal{P}_r \cap \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$.

$\operatorname{Ker} \Delta_r = \mathcal{P}_0$.

c) $\operatorname{Im} \Delta_r = \Delta_r(\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^r)) = \operatorname{Vect}(\Delta 1, \Delta X, \dots, \Delta X^r) \overset{\Delta 1 = 0}{=} \operatorname{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r)$.

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\deg \Delta X^i = i-1$.

Alors $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathcal{P}_{r-1}$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal r de $\mathcal{P}_{r-1}$.

Comme $\mathcal{P}_{r-1}$ est de dimension r, c'est donc une base de $\mathcal{P}_{r-1}$.

Ainsi $\operatorname{Im} \Delta_r = \operatorname{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^r) = \mathcal{P}_{r-1}$.

$\operatorname{Im} \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.

d) Soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{P}_{r-1}$ (prendre $r=1$ si P est nul et $r = \deg P + 1$ si P n'est pas nul).

Alors $P \in \mathcal{P}_{r-1} = \operatorname{Im} \Delta_r$. Donc $\exists Q \in \mathcal{P}_r$, $\Delta_r Q = P$.

Ainsi $Q \in \mathcal{P}$ et $\Delta Q = \Delta_r Q = P$.

$\forall P \in \mathcal{P}, \exists Q \in \mathcal{P}, \Delta P = Q$. $\underline{\underline{\Delta \text{ est surjective.}}}$

(Q3) Notons Δ' la restriction de Δ à $\mathcal{E}$

- $\underline{\Delta' \text{ est une application linéaire de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathcal{P}}$ car Δ est linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
- Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta'$. $\Delta' P = 0$. $\Delta P = 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda$. Or $P(0) = 0$ donc $\lambda = 0$

  Ainsi $P = 0$.

  $\operatorname{Ker} \Delta' = \{0\}$. $\underline{\Delta' \text{ est injective.}}$
- Soit $P \in \mathcal{P}$. $\exists Q \in \mathcal{P}$, $\Delta Q = P$ car Δ est surjective.

  Posons $\lambda = Q(0)$ et $\hat{Q} = Q - \lambda$.

  Alors $\hat{Q}(0) = 0$ donc $\hat{Q} \in \mathcal{E}$ et $\Delta' \hat{Q} = \Delta \hat{Q} = \Delta Q - \Delta \lambda = \Delta Q - 0 = \Delta Q = P$.

  Ainsi $\forall P \in \mathcal{P}, \exists \hat{Q} \in \mathcal{E}$, $\Delta' \hat{Q} = P$. $\underline{\Delta' \text{ est surjective.}}$

Finalement $\underline{\underline{\text{la restriction de } \Delta \text{ à } \mathcal{E} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{E} \text{ sur } \mathcal{P}.}}$

(Q4) a) • Considérons la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la récurrence suivante :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1}).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n existe et appartient à $\mathcal{P}$.

→ C'est clair pour $n=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$N_{n-1} \in \mathcal{P}$ et Δ'^{-1} est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$, ainsi $\Delta'^{-1}(N_{n-1})$ est défini et appartient à $\mathcal{E}$ donc à $\mathcal{P}$. N_n est défini et appartient à $\mathcal{P}$.

Ceci achève la récurrence.

1°/ $N_0 = 1$.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N_n = \Delta'^{-1}(N_{n-1})$. Alors $N_n \in \mathcal{E}$ et $\Delta' N_n = N_{n-1}$.

Ainsi $N_n(0) = 0$ et $\Delta N_n = N_{n-1}$.

La suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$

Considérons une seconde suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta M_n = M_{n-1}$ et $M_n(0) = 0$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = N_n$.

→ C'est clair pour $n = 0$.

→ Supposons que pour n dans $\mathbb{N}^*$ on ait : $M_{n-1} = N_{n-1}$.

$M_n \in \mathcal{E}$, $N_n \in \mathcal{E}$, $\Delta' M_n = \Delta M_n = M_{n-1} = N_{n-1} = \Delta N_n = \Delta' N_n$ et Δ' est injective. Alors $M_n = N_n$ ce qui achève la récurrence.

Finalement Il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_n = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

b) Posons $T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. (T_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$.

- $T_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ * $T_n(0) = 0$ * 1er cas $n \geq 2$

$$\Delta T_n = T_n(X+1) - T_n(X) = \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=0}^{n-1}(X-k+1) - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right] = \frac{1}{n!}\left[\prod_{k=-1}^{n-2}(X-k) - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right].$$

$$\Delta T_n = \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-2}(X-k)\right)\left(X+1-(X-(n-1))\right) = \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(X-k) = T_{n-1}.$$

2e cas.. $n = 1$. $\Delta T_1 = \Delta(X-1) = (X+1-1) - (X-1) = 1 = T_0$.

Ainsi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que :

$T_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta T_n = T_{n-1}$ et $T_n(0) = 0$.

Alors d'après a) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = N_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

c) Soit $r \in \mathbb{N}$. $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $\deg N_i = i$.

Ainsi $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathcal{P}_r$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal $r+1$ de $\mathcal{P}_r$.

Comme $\mathcal{P}_r$ est de dimension $r+1$, c'est une base de $\mathcal{P}_r$.

Pour tout r dans $\mathbb{N}$, $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$.

Le reste est hors-programme, voir à la fin… si j'ai le temps !

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\Delta N_i = N_{i-1}$. Une récurrence des plus simple montre alors que :

$\forall n \in [\![0, k]\!]$, $\Delta^n N_k = N_{k-n}$. Ceci vaut encore pour $k = 0$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![0, k]\!]$, $\Delta^n N_k = N_{k-n}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\Delta^k N_k = N_0 = 1$. Alors $\Delta^{k+1} N_k = \Delta 1 = 0$.

$\forall n \in [\![k+1, +\infty[\![$, $\Delta^n N_k = \Delta^{n-(k+1)} (\Delta^{k+1} N_k) = \Delta^{n-(k+1)} 0 = 0$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n N_k = \begin{cases} N_{k-n} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $r \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{P}_r$. $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$ donc

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $\varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k N_k$.

$\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^n \varphi = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^n N_k = \sum_{k=n}^{r} a_k N_{k-n}$

$\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^n \varphi(0) = \sum_{k=n}^{r} a_k N_{k-n}(0)$.

Or $\forall i \in \mathbb{N}$, $N_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^n \varphi(0) = a_n$. Alors $\varphi = \sum_{k=0}^{r} \Delta^k \varphi(0) N_k = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$.

$\forall r \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathcal{P}_r, \varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$ …ce qui répond très largement à la question.

Soit $\varphi \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$.

Alors $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$. $\deg \varphi \leq r$.

$\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\Delta^i \varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) \Delta^i N_n \overset{r+1}{\downarrow}= 0$ car $\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^i N_n = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![r+1, +\infty[\![$ $\Delta^i \varphi(0) = 0$. Cela autorise l'écriture $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0) N_n$.

$$\forall \varphi \in \mathcal{P},\ \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0) N_n$$

e) Soit $\varphi \in \mathcal{P}$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{P}_r$. $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_n$

On a : $\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) \Delta N_{n+1} = \Delta\left(\sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1}\right)$.

Posons $P_\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1}$. $P_\varphi \in \mathcal{P}$ et $P_\varphi(X+1) - P_\varphi(X) \overset{\Delta P_\varphi = \varphi}{\downarrow}= \varphi$.

Soit $P \in \mathcal{P}$.

$P(X+1) - P(X) = \varphi \Leftrightarrow \Delta P = \varphi \Leftrightarrow \Delta P = \Delta P_\varphi \Leftrightarrow \Delta(P - P_\varphi) = 0 \Leftrightarrow P - P_\varphi \in \mathcal{P}_0$

$P(X+1) - P(X) = \varphi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = P_\varphi + \lambda$.

$P_\varphi = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1}$ car $\varphi \in \mathcal{P}_r$ et donc

$\Delta^n \varphi(0) = 0$ si $n \in [\![r+1, +\infty[\![$. Ainsi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P},\ \{P \in \mathcal{P} \mid P(X+1) - P(X) = \varphi\} = \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1} + \lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

f) Soit φ un élément de $\mathcal{P}$. Soit P un élément de $\mathcal{P}$ tel que $P(X+1) - P(X) = \varphi$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) = P(n+1) - P(0).$$

Posons $\varphi = X^2$ et $P = P_\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n \varphi(0) N_{n+1}$.

$\Delta^0\varphi = \varphi = X^2$. $\Delta^1\varphi = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$. $\Delta^2\varphi = 2(X+1)+1-(2X+1) = 2$

$\Delta^3\varphi = 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3 \Rightarrow \Delta^n\varphi = 0$.

Ainsi $\Delta^0\varphi(0)=0$, $\Delta^1\varphi(0)=1$, $\Delta^2\varphi(0)=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3 \Rightarrow \Delta^n\varphi(0)=0$.

Ainsi $P = 1\times N_2 + 2N_3 = \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{2}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-4+3)$.

$P = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n}\varphi(k) = P(n+1)-P(0) = \frac{1}{6}(n+1)(n+1-1)(2(n+1)-1) - 0$.

$\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).}$

Q5 Soit $\varphi\in\mathcal{E}$. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \Delta^n\varphi = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\varphi(X+i)$.

- $\sum_{i=0}^{0}(-1)^{0-i}\binom{0}{i}\varphi(X+i) = \varphi(X) = \Delta^0\varphi$; la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Par hypothèse de récurrence $\Delta^n\varphi = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\varphi(X+i)$. Par linéarité de Δ :

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\Delta(\varphi(X+i)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left[\varphi(X+i+1)-\varphi(X+i)\right].$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\varphi(X+i+1) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\varphi(X+i).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n+1}\underset{\text{ou } (-1)^{n+1-i}}{\underset{\uparrow}{(-1)^{n-(i-1)}}}\binom{n}{i-1}\varphi(X+i) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+1-i}\binom{n}{i}\varphi(X+i).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1-i}\left[\underbrace{\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}}_{\binom{n+1}{i}}\right]\varphi(X+i) + \binom{n}{n}\varphi(X+n+1) + (-1)^{n+1}\binom{n}{0}\varphi(X).$$

$$\Delta^{n+1}\varphi = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1-i}\binom{n+1}{i}\varphi(X+i) + \varphi(X+n+1) + (-1)^{n+1}\varphi(X) \underset{\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+1-i}\binom{n+1}{i}\varphi(X+i).$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall Q \in \mathcal{P}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n Q = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(X+i).$

(Q6) a) i. g et h sont deux endomorphismes de $\mathcal{P}_r$. Pour montrer que $g=h$ il suffit de prouver que $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $g(N_i)=h(N_i)$ car $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$.

Cela revient à montrer que $\forall j \in [\![0,r]\!]$, $g(N_{r-j}) = h(N_{r-j})$.

Rappelons que l'on suppose que $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r)=h(N_r)$.

- Par hypothèse la propriété est vraie pour $j=0$.
- Supposons la propriété vraie pour j dans $[\![0,r-1]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

$g(N_{r-(j+1)}) = g(N_{r-j-1}) = g(\Delta N_{r-j}) = g(\Delta_r N_{r-j}) = (g \circ \Delta_r)(N_{r-j})$ et $g \in C(\Delta_r)$.

$g(N_{r-(j+1)}) = (\Delta_r \circ g)(N_{r-j}) = \Delta_r g(N_{r-j})$ car $g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g$.

De même $h(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r h(N_{r-j})$

a l'hypothèse de récurrence donne $g(N_{r-j}) = h(N_{r-j})$.

donc $g(N_{r-(j+1)}) = \Delta_r g(N_{r-j}) = \Delta_r h(N_{r-j}) = h(N_{r-(j+1)})$. Ceci achève la récurrence

Ceci achève également de montrer que $g=h$.

Si $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r)=h(N_r)$ alors $g=h$.

ii. $N_r \in \mathcal{P}_r$ et $g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$ donc $g(N_r) \in \mathcal{P}_r$. Or $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ est une base de $\mathcal{P}_r$.

Ainsi $\exists! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_{r-1} N_{r-1} + a_r N_r$.

$\exists! (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g(N_r) = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_r N_r$.

iii. • $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\Delta_r \circ \Delta_r^i = \Delta_r^{i+1} = \Delta_r^i \circ \Delta_r$; $\forall i \in [\![0,r]\!]$, $\Delta_r^i \in C(\Delta_r)$.

Soit $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$.

$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i$.

Alors $\Delta_r \circ g = \Delta_r \circ \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i\right) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^{i+1} = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \Delta_r^i\right) \circ \Delta_r = g \circ \Delta_r$.

Ainsi $g \in C(\Delta_r)$.

Par conséquent $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \subset C(\Delta_r)$.

• Réciproquement soit $g \in C(\Delta_r)$.

$g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_0 N_0$.

Notons que $g(N_r) = a_r \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}(N_r) + a_{r-1} \Delta_r(N_r) + a_{r-2} \Delta_r^2(N_r) + \dots + a_0 \Delta_r^r(N_0)$.

Posons alors $h = a_r \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r} + a_{r-1} \Delta_r + \dots + a_0 \Delta_r^r$.

d'après ce qui précède $h \in C(\Delta_r)$.

Alors $g \in C(\Delta_r)$, $h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r) = h(N_r)$. Ainsi $g = h$

Par conséquent $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$.

Finalement $\underline{\underline{C(\Delta_r) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)}}$.

ce qui montre que $\underline{\underline{C(\Delta_r) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}}$ et

que $(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \Delta_r^2, \dots, \Delta_r^r)$ en est une famille génératrice.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $\beta_0 \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r} + \beta_1 \Delta_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$

Alors $\beta_0 N_r + \beta_1 \Delta_r N_r + \dots + \beta_r \Delta_r^r N_r = 0_{\mathcal{G}_r}$.

Ainsi $\beta_0 N_r + \beta_1 N_{r-1} + \dots + \beta_r N_0 = 0_{\mathcal{G}_r}$. la liberté de la famille $(N_0, N_1, \dots, N_r)$

donne $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Ceci achève de montrer que $(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$ est libre.

$\underline{\underline{(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r) \text{ est une base de } C(\Delta_r)}}$.

iv. Soit $P \in \mathcal{P}$. $(d \circ \Delta)(P) = d(P(X+1) - P(X)) = P'(X+1) - P'(X) = \Delta(P'(X)) = (\Delta \circ d)(P)$

Ainsi $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.

Supposons qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell$.

$d(N_{r+1}) = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell (N_{r+1}) = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell N_{r+1-\ell} = a_0 N_{r+1} + a_1 N_r + \dots + a_r N_1$.

0 est une racine de $N_{r+1}, N_r, \dots, N_1$ donc 0 est racine de $d(N_{r+1}) = N'_{r+1}$.

Or clairement 0 est racine d'ordre 1 de N_{r+1} donc $N'_{r+1}(0) \neq 0$!!

Ainsi <u>$d \circ \Delta = \Delta \circ d$ mais quelle que soit la valeur de r il n'existe pas $a_0, a_1, \dots, a_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $d = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell N_\ell$.</u>

b) $\Delta_r(N_0) = 0$ et $\forall n \in [\![1, r]\!]$, $\Delta_r(N_n) = N_{n-1}$

<u>Alors la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n \in [\![0,r]\!]}$ est :</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu que :

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta_r^\ell N_n = \begin{cases} N_{n-\ell} & \text{si } \ell \leq n \\ 0 & \end{cases}$

Alors $\forall n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta_r^{r+1} N_n = 0$. $\quad \Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)} \dots (*)$

X^{r+1} est un polynôme annulateur de Δ_r. Alors $\mathrm{Sp}\, \Delta_r \subset \{0\}$.

Notons que $\Delta_r(N_0) = 0$ et $N_0 = 1 \neq 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}\, \Delta_r$. $\mathrm{Sp}\, \Delta_r = \{0\}$.

Supposons que Δ_r est diagonalisable alors $\mathrm{Ker}\, \Delta_r = \mathrm{SEP}(\Delta_r, 0) = \mathcal{P}_r$.

donc $\Delta_r = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}$. Or $\Delta_r N_1 = 1 \neq 0$ ($r \in \mathbb{N}^*$!)

Ainsi <u>Δ_r n'est pas diagonalisable ... si $r \in \mathbb{N}^*$.</u>

(*) car Δ_r^{r+1} et $0_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)}$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{P}_r$ qui coïncident sur une base de $\mathcal{P}_r$.

c) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$.

Alors $g \circ \Delta_r = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = \Delta_r \circ g$. Ainsi $g \in C(\Delta_r)$.

Dans ces conditions $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $g = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k$.

Alors $\Delta_r = \left(\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell \Delta_r^\ell\right) \circ \left(\sum_{i=0}^{r} a_i \Delta_r^i\right) = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{i=0}^{r} a_\ell a_i \Delta_r^{\ell+i}$.

Rappelons que $\forall j \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\Delta_r^j = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$ car $\Delta_r^{r+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{G}_r)}$.

Donc $\Delta_r = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{i=0}^{r-\ell} a_\ell a_i \Delta_r^{\ell+i} = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{j=\ell}^{r} a_\ell a_{j-\ell} \Delta_r^j$

$\Delta_r = \sum_{j=0}^{r} \left(\sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell}\right) \Delta_r^j$.

La liberté de $(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_r}, \Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^r)$ donne $\forall j \in [\![0, r]\!]$, $\sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $0 = \sum_{\ell=0}^{0} a_\ell a_{0-\ell}$ et $\sum_{\ell=0}^{1} a_\ell a_{1-\ell} = 1$.

Donc $0 = a_0^2$ et $a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1$. Ainsi $a_0 = 0$ et $2 a_0 a_1 = 1$!!

<u>Il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathcal{G}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$.</u>

PARTIE II

Q1 $t \in \mathbb{R}$. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est défini (!) et $u_n > 0$ car $x \in \mathbb{R}-\mathbb{N}$.

$$v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left[\frac{(n+1)^t N_{n+1}(x)}{n^t \quad N_n(x)}\right] = \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^t \left|\frac{x-n}{n+1}\right|\right].$$

Supposons alors $n > x$ (ce qui n'est en rien restrictif pour étudier la nature de la série de terme général v_n).

Alors $v_n = t \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n-x}{n+1} = t \ln(1+\frac{1}{n}) + \ln \frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{n}} = (t-1)\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{x}{n})$.

$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\ln(1-\frac{x}{n}) = -\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o(\frac{1}{n^2})$.

Ainsi $v_n = \frac{t-1}{n} - \frac{t-1}{2n^2} - \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{t-1-x}{n} - \frac{t-1+x^2}{2} \times \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

1er cas.. $t-1-x \neq 0$. Alors $v_n \sim (t-1-x) \times \frac{1}{n}$.

Or la série de terme général $(t-1-x) \times \frac{1}{n}$ est divergente et de signe constant. Ceci suffit alors pour dire que la série de terme général v_n diverge.

2ème cas.. $t-1-x = 0$. Alors $\frac{t-1+x^2}{2} = \frac{x+x^2}{2}$

a) $\frac{x+x^2}{2} \neq 0$. $v_n \sim -\frac{x+x^2}{2}\frac{1}{n^2}$; $|v_n| \sim \frac{|x+x^2|}{2} \times \frac{1}{n^2}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|x+x^2|}{2} \times \frac{1}{n^2} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{|x+x^2|}{2} \times \frac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

b) $\frac{x+x^2}{2} = 0$. $v_n = o(\frac{1}{n^2})$. Alors, $|v_n| = o(\frac{1}{n^2})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|v_n|$.

Ainsi si $t-1-x=0$ la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Finalement la série de terme général v_n converge si et seulement si $t=x+1$.

b] Observons que : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)\right)+\ln u_1$.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1} v_k+\ln u_1$.

1er cas.. $t-1-x>0$. Rappelons que $v_n\sim(t-1-x)\times\frac{1}{n}$ et que la série de terme général v_n diverge.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(t-1-x)\times\frac{1}{n}>0$. Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n>0$.

Dans ces conditions : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}v_k=+\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=+\infty$

Finalement $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2ème cas.. $t-1-x<0$. Rappelons que $v_n\sim(t-1-x)\times\frac{1}{n}$ et que la série de terme général v_n diverge.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(t-1-x)\times\frac{1}{n}<0$. Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n<0$

Alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}v_k=-\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n)=-\infty$. $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

3ème cas.. $t-1-x=0$. La série de terme général v_n converge et :

$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $\ln u_n=\sum_{k=1}^{n-1}v_k+\ln u_1$ donc la suite de terme général $\ln u_n$ converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty}v_k+\ln u_1$.

Alors $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge vers $u_1 e^{\sum_{k=1}^{+\infty}v_k}$; notons que $u_1 e^{\sum_{k=1}^{+\infty}v_k}>0$.

Si $t-1-x>0$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. Si $t-1-x<0$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

Si $t=x+1$: $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge et a une limite strictement positive.

Posons $t = x+1$. Alors nous pouvons dire qu'il existe un réel strictement positif tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = C(x)$. Ainsi $u_n \sim C(x)$ car $C(x) \neq 0$.

Alors $n^{x+1} |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)$; $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$.

Il existe un réel strictement positif $C(x)$ tel que : $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$.

Q2 a) $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = b^x$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b^i = (b-1)^n$.

Si $b \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = b^x$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (b-1)^n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que $\varphi \in \mathcal{P}_n$ et rappelons que $(N_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

La démonstration faite en I Q 4 d) donne $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\varphi)(0) N_k$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\varphi)(0) N_k = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$. La liberté de $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ donne alors :

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \Delta^k(\varphi)(0)$.

D'après I Q 5 : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \Delta^k(\varphi)(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi(i)$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi(i)$.

Montrons alors par récurrence finie que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = \varphi(k)$.

- $\sum_{i=0}^{0} (-1)^{0-i} \binom{0}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{0} (-1)^{0-i} \binom{0}{i} \varphi(i)$ donc $f(0) = \varphi(0)$.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $f(i) = \varphi(i)$.
  $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} f(i) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i)$. L'hypothèse de récurrence

donne : $\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i) + f(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \varphi(i)$, donc $f(k+1) = \varphi(k+1)$.

ceci achève la récurrence.

Finalement $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(k)=g(k)$.

Alors $x \mapsto f(x)-g(x)$ s'annule en $0,1,2,\dots,n$.

4) Soit x un élément de $[0,+\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

1er cas : $x \in [0,+\infty[- [\![0,n]\!]$. Rappelons que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $\varphi(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n} a_k N_k(t) - N_{n+1}(t)A$.

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow A\,N_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$

$x \notin [\![0,n]\!]$ donc x n'est pas un zéro de N_{n+1}.

Alors $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{N_{n+1}(x)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)\right]$.

dans la suite nous supposerons que $A = \frac{1}{N_{n+1}(x)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)\right]$.

Alors φ s'annule en x.

De plus $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(i) = f(i) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(i) - N_{n+1}(i)A$

or $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $f(i)=\sum_{k=0}^{n} a_k N_k(i)$ et $N_{n+1}(i)=0$.

Par conséquent $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(i)=0$. Ainsi $0,1,\dots,n,x$ sont $n+2$ zéros distincts de φ.

$f, N_0, N_1, \dots, N_{n+1}$ sont de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ donc φ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Montrons alors par récurrence que pour tout $i \in [\![0,n+1]\!]$, $\varphi^{(i)}$ s'annule au moins $n+2-i$ fois sur $[0,+\infty[$.

→ C'est clair pour $i=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour i dans $[\![0,n]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Posons $g=\varphi^{(i)}$. g admet au moins $n+2-i$ zéros distincts $x_1, x_2, \dots,$ x_{n+2-i} tels que $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2-i}$.

Soit $k \in [\![1,n+1-i]\!]$. g est dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$ et $g(x_k)=g(x_{k+1})=0$.

Le théorème de Rolle montre l'existence de y_k dans $]x_k, x_{k+1}[$ tel que $g'(y_k)$.

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1-i}$ sont alors $n+1-i$ zéros distincts de g' appartenant à $[0,+\infty[$

Ainsi $\varphi^{(i+1)}$ admet au moins $n+2-(i+1)$ zéros distincts dans $[0,+\infty[$.

Ceci achève la récurrence.

Nous pouvons alors dire que $\varphi^{(n+1)}$ admet au moins un zéro dans $[0,+\infty[$.

$\exists \theta \in [0,+\infty[,\ \varphi^{(n+1)}(\theta) = 0.$

$\forall t \in [0,+\infty[,\quad \varphi(t) = f(t) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(t) - N_{n+1}(t)A.$

Rappelons que $\forall \ell \in [\![0,n]\!],\ N_\ell \in \mathcal{P}_n$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!],\ N_k^{(n+1)} = 0_{\mathcal{P}_n}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ \varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - N_{n+1}^{(n+1)}(t)\,A.$

$\forall t \in \mathbb{R},\ N_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-i)$. Alors $N_{n+1}^{(n+1)}$ est une constante.

D'où $N_{n+1}^{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!$

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[,\ \varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A$. Alors $0 = \varphi^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A$.

Donc $A = f^{(n+1)}(\theta)$. Alors $\frac{1}{N_{n+1}(x)}\left[f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)\right] = A = f^{(n+1)}(\theta)$.

Donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + N_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\theta)$.

<u>2ème cas</u> : $x \in [\![0,n]\!]$. Alors $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x)$ et $N_{n+1}(x) = 0$.

Alors si θ est un élément quelconque de $[0,+\infty[$.

$f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) + N_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\theta)$. D'où :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,+\infty[,\ \exists \theta \in [0,+\infty[,\ f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$

d) Soit $x \in [0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\exists \theta \in [0,+\infty[$

$\exists \theta \in]0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + N_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\theta)$

$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)| = |N_{n+1}(x)|\,|f^{(n+1)}(\theta)| \leq M(n+1)|N_{n+1}(x)|$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)| \leq M(n+1)|N_{n+1}(x)|$. Supposons que $x \notin \mathbb{N}$.

Or $M n |N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} M(n+1)\dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{M n C(x)}{n^{x+1}} = \dfrac{M C(x)}{n^x}$ car $x \in [0,+\infty[\setminus \mathbb{N}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (M n |N_{n+1}(x)|) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M C(x)}{n^x} = 0$ ($x>0$!)

Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) = f(x)$.

La série de terme général $a_k N_k(x)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x)$.

Supposons maintenant que x soit dans $\mathbb{N}$.

$\forall n \in [\![x,+\infty[\![$, $N_{n+1}(x) = 0$ (les zéros de N_{n+1} sont $0, 1, 2, \dots, n$)

Alors $\forall n \in [\![x,+\infty[\![$, $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)| \leq M n |N_{n+1}(x)| = 0$.

$\forall n \in [\![x,+\infty[\![$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$. Cela suffit largement pour dire que la série de terme général $a_k N_k(x)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = f(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$

Supposons que f s'annule sur $\mathbb{N}$. $\forall i \in \mathbb{N}$, $f(i) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(i) = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x) = 0$.

Si f s'annule sur $\mathbb{N}$, f est nulle sur $[0,+\infty[$.

(Q3) a] Soit h un réel tel que $|h|>1$. Soit $x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$.

$$|h^n N_n(x)| = |h|^n |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |h|^n \frac{c(x)}{n^{x+1}}.$$

$c(x)>0$ donc par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(|h|^n \frac{c(x)}{n^{x+1}}\right)=+\infty$ car $|h|>1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |h^n N_n(x)|=+\infty$. La suite $(h^n N_n(x))$ ne peut converger vers 0.

La série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente si $x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$ et si h est un réel tel que $|h|>1$.

b] Ici $h\in\mathbb{R}$ et $|h|<1$. x est un élément de $\mathbb{R}$.

i) 1er Cas.. $x\notin\mathbb{N}$. $n^2|h^n N_n(x)| = n^2|h|^n |N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2|h|^n\frac{c(x)}{n^{x+1}} = c(x)|h|^n\frac{1}{n^{x-1}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(c(x)|h|^n\frac{1}{n^{x-1}}\right)=0$ par croissance comparée car $|h|<1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2|h^n N_n(x)|\right)=0$. Alors $|h^n N_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|h^n N_n(x)|\geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$. La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|h^n N_n(x)|$.

2e Cas.. $x\in\mathbb{N}$. Alors $\forall n\in]\!] x,+\infty[\![$, $|h^n N_n(x)| = |h^n\times 0| = 0$.
La suite $(|h^n N_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ est nulle à partir du rang $x+1$.
Donc la série de terme général $|h^n N_n(x)|$ converge.

Si $x\in\mathbb{R}$ et si h est un réel tel que $|h|<1$ alors la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente.

ii) Posons $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi(t) = (1+t)^x$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et une récurrence simple donne $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi^{(n)}(t) = x(x-1)\cdots(x-n+1)(1+t)^{x-n}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in]-1,+\infty[$, $\varphi^{(n)}(t) = N_n(x)(1+t)^{x-n}\times n!$

Rappelons que $h \in \mathbb{R}$ et que $|h|<1$. Alors $h \in]-1,+\infty[$. La formule de Taylor avec reste intégral donne : $\varphi(h) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{\ell!} \varphi^{(\ell)}(0) + \int_0^h \frac{(u-h)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(u)\,du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

pour c ii.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+h)^x = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{\ell!} N_\ell(x) \times \ell! + \int_0^h \frac{(u-h)^n}{n!} N_{n+1}(x)(1+u)^{x-(n+1)} (n+1)!\,du.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+h)^x = \sum_{\ell=0}^{n} h^\ell N_\ell(x) + (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du.$$

⚠ Notons que ceci vaut pour tout $h \in]-1,+\infty[$!

Posons : $\forall u \in]-1,+\infty[,\ \delta(u) = \frac{u-h}{1+u}$. δ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall u \in]-1,+\infty[,\ \delta'(u) = \frac{1+h}{(1+u)^2}$

Alors $\forall u \in]-1,+\infty[,\ \delta'(u)>0$. δ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

Si $h \geq 0$: $\forall u \in [0,h],\ \delta(0) \leq \delta(u) \leq \delta(h)$; $\forall u \in [0,h],\ -h \leq \delta(u) \leq 0$; $\forall u \in [0,h],\ |\delta(u)| \leq h = |h|$

Si $h<0$: $\forall u \in [h,0],\ \delta(h) \leq \delta(u) \leq \delta(0)$; $\forall u \in [h,0],\ 0 \leq \delta(u) \leq -h$; $\forall u \in [h,0],\ |\delta(u)| \leq -h = |h|$.

donc $\forall u \in [\overleftrightarrow{0,h}],\ |\delta(u)| \leq |h|$; $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [\overleftrightarrow{0,h}],\ \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n = \left|\frac{u-h}{1+u}\right|^n = |\delta(u)|^n \leq |h|^n$

Supposons $h \neq 0$ et distinguons deux cas.

1er cas.. $h>0$. $\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leq \frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n |(1+u)^{x-1}|\,du$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leq \frac{1}{|h|^n}\int_0^h |h|^n (1+u)^{x-1}\,du = \int_0^h (1+u)^{x-1}\,du = \left|\int_0^h (1+u)^{x-1}\,du\right|$$

2ème cas.. $h<0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \underset{|A|=|-A|}{=} \left|\frac{1}{|h|^n}\right| \left|\int_h^0 \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leq \frac{1}{|h|^n}\int_h^0 \left|\frac{h-u}{1+u}\right|^n (1+u)^{x-1}\,du.$$

$$\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leq \frac{1}{|h|^n}\int_h^0 |h|^n (1+u)^{x-1}\,du = \int_h^0 (1+u)^{x-1}\,du = \left|\int_0^h (1+u)^{x-1}\,du\right|.$$

Finalement si h n'est pas nul : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leq \left|\int_0^h (1+u)^{x-1}\,du\right|$.

Si h n'est pas nul la suite $\left(\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

iii) • Si h est nul : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = 1 - N_0(x) = 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$.

• Supposons h non nul. $\exists M_h \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}du\right| \leq M_h$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x)\right| = \left|(n+1)N_{n+1}(x)\,|h|^n\right| \left|\frac{1}{|h|^n}\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}du\right|$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x)\right| \leq (n+1)\,|N_{n+1}(x)|\,|h|^n M_h$ (*).

<u>1^er cas</u>... $x \notin \mathbb{N}$. Alors $(n+1)|N_{n+1}(x)|\,|h|^n M_h \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}|h|^n M_h \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{C(x)}{n^{x+1}}|h|^n M_h$.

Donc $(n+1)|N_{n+1}(x)|\,|h|^n M_h \underset{n\to+\infty}{\sim} C(x)M_h\frac{|h|^n}{n^x}$.

Or $|h|<1$ donc, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty}\left(C(x)M_h\frac{|h|^n}{n^x}\right) = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)|N_{n+1}(x)|\,|h|^n M_h\right) = 0$.

<u>2^e cas</u>... $x \in \mathbb{N}$. Alors $N_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \geq x$ on a donc encore et très largement $\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)|N_{n+1}(x)|\,|h|^n M_h\right) = 0$.

Dans ces conditions (*) donne : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = (1+h)^x$ par encadrement.

Si $|h|<1$ $\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x) = (1+h)^x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

<u>c)</u> <u>Ici $h=1$</u> i... x est un réel tel que $x \leq -1$.

$$|N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}} \quad \text{car } x \notin \mathbb{N}.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty}|N_n(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{C(x)}{n^{x+1}} = \begin{cases} C(x) & \text{si } x=-1 \\ +\infty & \text{si } x<-1 \end{cases}$; la suite $(N_n(x))_{n\geq 0}$

ne converge pas vers 0. <u>La série de terme général $N_n(x)$ diverge pour $x \leq -1$.</u>

ii. Ici on a $x \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.

Nous avons remarqué que la formule de 3° b) ii. vaut pour tout h dans $]-1,+\infty[$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+1)^x - \sum_{k=0}^{n} 1^k N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [0,1]$, $0 \leq \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} = \frac{(1-u)^n}{(1+u)^n}(1+u)^{x-1} \leq (1-u)^n \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}$. $\frac{1}{(1+u)^n} \leq 1$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \leq \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n du}_{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{\max_{t\in[0,1]}(1+t)^{x-1}}{n+1}$.

Posons $L_x = \max_{t \in [0,1]} (1+t)^{x-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x)\right| \leq (n+1) N_{n+1}(x) \frac{L_x}{n+1} = N_{n+1}(x) L_x$. $(**)$

1er cas. $x \notin \mathbb{N}$. $N_{n+1}(x) L_x \underset{n \to +\infty}{\sim} L_x \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \sim L_x \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ et $x+1 > 0$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (N_{n+1}(x) L_x) = 0$

2e cas. $x \in \mathbb{N}$. Alors $N_{n+1}(x) L_x = 0$ pour $n \geq x$

On a encore $\lim_{n \to +\infty} (N_{n+1}(x) L_x) = 0$.

$(**)$ donne alors : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} N_k(x) = 2^x$.

Si $x > -1$ la série de terme général $N_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x$.

d) Ici $h = -1$.

Dans toute la suite x est un réel. Nous ne le redirons pas... souvent.

i. 1er cas $x \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(|(-1)^n N_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $x+1$. La série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge.

Donc la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente.

<u>2ème cas</u>.. $x \notin \mathbb{N}$. $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \sim \frac{C(x)}{n^{x+1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{C(x)}{n^{x+1}} \geqslant 0$.

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ est de même nature que la série de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$. Cette série de

Or la série de terme général $\frac{C(x)}{n^{x+1}}$ converge si et seulement si $x+1>1$

Alors la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x>0$... dans le cas où $x \notin \mathbb{N}$.

Finalement la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$ converge si et seulement si $x \in \mathbb{N}$ ou ($x \notin \mathbb{N}$ et $x>0$) donc si et seulement si $x \geqslant 0$.

<u>La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $x \geqslant 0$.</u>

Si $x \geqslant 0$ la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Supposons que $x<0$. Soit $n \in \mathbb{N}$... ou $n \in \mathbb{N}^*$

$$(-1)^n N_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(-|x|-k) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(|x|+k) \geqslant 0$$

Alors $(-1)^n N_n(x) = |(-1)^n N_n(x)|$. La série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est de même nature que la série de terme général $|(-1)^n N_n(x)|$; elle est donc divergente.

<u>Finalement la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ converge si et seulement si $x \geqslant 0$.</u>

ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_{k-1} = \Delta N_k$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_{k-1}(x-1) = N_k((x-1)+1) - N_k(x-1) = N_k(x) - N_k(x-1)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^k N_k(x) = (-1)^k N_{k-1}(x-1) + (-1)^k N_k(x-1) = (-1)^k N_k(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1)$

Alors $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k N_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k N_k(x-1) - (-1)^{k-1} N_{k-1}(x-1)\right) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1)$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1) - N_0(x-1) + N_0(x) \overset{N_0(x-1)=N_0(x)=1}{=} (-1)^n N_n(x-1)$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1)$.</u>

<u>Remarques</u> 1.. On peut aussi obtenir le résultat par récurrence
2.. Ce résultat vaut encore pour $n=0$.

iii. 1er Cas.. $x \notin \mathbb{N}$. Alors $x>0$ et $x-1 \notin \mathbb{N}$.

Ainsi $|(-1)^n N_n(x-1)| = |N_n(x-1)| \sim \frac{C(x)}{n^{(x-1)+1}} = \frac{C(x)}{n^x}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} |(-1)^n N_n(x-1)| = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n N_n(x-1)\right) = 0$

Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k N_k(x) = 0$. $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0$.

2e Cas.. $x=0$ $N_0(x) = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, N_i(x) = 0$. $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 1$

3ème Cas.. $x \in \mathbb{N}^*$. $x-1 \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \leq n \Rightarrow N_n(x-1) = 0$.

Alors $\forall n \in [\![x,+\infty[\![$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1) = 0$; $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k N_k(x) = 0$

Finalement : $\forall x \in [0,+\infty[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$.