Exercice 1

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4.
Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b $(b \neq 0)$ désignent des nombres réels.

1. Recherche des matrices $M(a,b)$ telles que$[M(a,b)]^2 = M(a,b)$

a) Exprimer $[M(a,b)]^2$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_{10}, où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10

b) Déterminer les couples (a,b) avec $b \neq 0$ tels que $[M(a,b)]^2 = M(a,b)$

2. Calcul des puissances de $M(a,b)$

On considère les matrices $P = M(1/10, 1/10))$ et $Q = I_{10} - P$

a) Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. En déduire les puissances P^k et Q^k pour $k \geq 1$.

b) Exprimer$M(a,b)$ comme combinaison linéaire de P et de Q et en dédurie $[M(a,b)]^n$ comme combinaison linéaire des matrices P et Q. Expliciter enfin la matrice $[M(a,b)]^n$

3. Limite des puissances de $M(1-9b, b)$ pour $0 \leq b \leq 1/9$

On suppose que a et b sont des nombres préels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$)

On dit que la suite de matrice $[M(a,b)]^n$ converge vers une matrice L lorsque tous les coefficients de $[M(a,b)]^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

a) Déterminer la matrice limite L de la suite $[M(1-9b,b)]^n$ quand n tend vers $+\infty$

b) Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices P et Q.

4. Etude des déplacements d'un pion sur un damier.

On considère un damier à 10 cases nmérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0, et à l'instant n (où n désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n.

On fait enfin les hypothèses suivantes concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k $(0 \leq k \leq 9)$, il se trouve encore sur la case k à l'instant $n+1$ avec la probabilité 1/2, et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

a) Pour tout entier j compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité $p(X_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\dots p(X_n = 9)$.

On note V_n *le* vecteur colonne *dont* les composantes sont , de haut en bas, les probabilités $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\dots p(X_n = 9)$. Déterminer une matrice carrée M d'ordre 10 telle que

$$V_{n+1} = M \cdot V_n$$

b) Calculer en fonction de n les probabiltiés $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\ldots p(X_n = 9)$, puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

A]ETUDE DES RACINES POSITIVES DE (En)

1. Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)

a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2

b) Etudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).

2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)

a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3.
En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacunes d'elles par deux entiers consécutifs.

b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0,où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.

- Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout entier naturel n, $u < y_n \leq v$.
- Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n, $v \leq y_n$.
- Etudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$

En déduire selon la position de y_0 par raport à v, le sens de variation de la suite (y_n).
Etudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n)

c) On choisit désormais $y_0 = 4$
Ecrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de y_n pour un entier n donné.
Etablir pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$
puis que $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$
Comment suffit-il de choisir n pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5}près?
Donner cette valeur de y_n avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

d) Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(x_n/3)$ et la condition initiale x_0, où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v.

- Montrer que si $u \leq x_0 < v$ alorspour tout entier naturel n, $u \leq x_n \leq v$
- Montrer que, si $x_0 \leq u$, alrs pour tout entier naturel n, $x_n \leq u$
- Etudier le signe de $x_{n+1} - x_n$ en fonction du signe de $x_n - x_{n-1}$

En déduire selon la position de x_0 par raport à u, le sens de variation de la suite (x_n)
Etudier enfin la convergence et la limite de la suite (x_n)

e) On choisit désormais $x_0 = 2$
Etablir pour tout entier naturel n que $0 \leq x_{n+1} - u \leq 0,65(x_n - u)$
puis que $0 \leq x_n - u \leq (0,65)^n$
Ecrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de x_n pour un entier n donné.
Comment suffit-il de choisir n pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5}près?
Donner cette valeur de x_n avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.

a) Etudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

b) Déterminer pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci.

c) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$, et en déduire la limite L de la suite (u_n), puis un équivalent simple de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer, pour $n \geq 4$ le signe de $f_n\left(v_{n-1}\right)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

NB : c'est le signe de $f_{n-1}\left(v_n\right)$ qu'il faudrait étudier.

e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g\left(x\right) = x - \ln\left(x\right)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rapellera l'énnoncé) que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.

Etablir que $g\left(v_n/n\right) = \ln\left(n\right)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g)que v_n/n tend vers $+\infty$, puis en déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$

B]ETUDE DES RACINES NEGATIVES DE (En)

1. Existence des racines négatives de (E_n)

a) Etudier sur $]-\infty; 0]$ les fonctions f_{2k} et f_{2k+1} pour tout entier $k \geq 1$

b) A quelle condtion sur l'entier n l'équation (E_n) admet-elle des racines négatives ?

2. Etude des racines négatives de l'équation (E_{2n})

a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative w_n de l'équation (E_{2n}) et déterminer, pour $n \geq 2$, le signe de $f_{2n}\left(w_{n-1}\right)$

b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite L de la suite (w_n) puis un équivalent simple de $w_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.