Exercice 1

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4.
Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par :

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b $(b \neq 0)$ désignent des nombres réels.

1. Recherche des matrices $M(a,b)$ telles que$[M(a,b)]^2 = M(a,b)$

   a) Exprimer $[M(a,b)]^2$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_{10}, où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10

   b) Déterminer les couples (a,b) avec $b \neq 0$ tels que $[M(a,b)]^2 = M(a,b)$

2. Calcul des puissances de $M(a,b)$

On considère les matrices $P = M(1/10, 1/10))$ et $Q = I_{10} - P$

   a) Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. En déduire les puissances P^k et Q^k pour $k \geq 1$.

   b) Exprimer$M(a,b)$ comme combinaison linéaire de P et de Q et en dédurie $[M(a,b)]^n$ comme combinaison linéaire des matrices P et Q. Expliciter enfin la matrice $[M(a,b)]^n$

3. Limite des puissances de $M(1-9b, b)$ pour $0 \leq b \leq 1/9$

On suppose que a et b sont des nombres préels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$)

On dit que la suite de matrice $[M(a,b)]^n$ converge vers une matrice L lorsque tous les coefficients de $[M(a,b)]^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

   a) Déterminer la matrice limite L de la suite $[M(1-9b, b)]^n$ quand n tend vers $+\infty$

   b) Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices P et Q.

4. Etude des déplacements d'un pion sur un damier.

On considère un damier à 10 cases nmérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0, et à l'instant n (où n désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n.

5. On fait enfin les hypothèses suivantes concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k $(0 \leq k \leq 9)$, il se trouve encore sur la case k à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1/2$, et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

   a) Pour tout entier j compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité $p(X_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\dots p(X_n = 9)$.

   On note V_n *le* vecteur colonne *dont* les composantes sont , de haut en bas, les probabilités $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\dots p(X_n = 9)$. Déterminer une matrice carrée M d'ordre 10 telle que

$$V_{n+1} = M \cdot V_n$$

b) Calculer en fonction de n les probabiltiés $p(X_n = 0)$, $p(X_n = 1)$, $\dots p(X_n = 9)$, puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

A]ETUDE DES RACINES POSITIVES DE (En)

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier n, $(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0$

1. Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)

a) On étudie les variations :

- On a $f_1(x) = 1 - xe^{-x}$. f_1 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
  En $+\infty$: $f_1(x) = 1 - xe^{-x} = 1 - x/e^x \to 1$ car $x = o(e^x)$ en $+\infty$.
  La courbe représentative de f a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
  Sens de variation : $f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$ et on a donc les variations :

x	0		1		$+\infty$	
$x-1$		$-$	0	$+$		affine
$f_1'(x)$	-1	$-$	0	$+$		
$f_1(x)$	1				1	
		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$		

- On a $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x}$. f_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
  En $+\infty$: $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x} = 1 - x^2/e^x \to 1$ car $x^2 = o(e^x)$ en $+\infty$.
  La courbe représentative de f_2 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
  Sens de variation : $f_2'(x) = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$ d'où :

x	0		2		$+\infty$	
$x(x-2)$	0	$-$	0	$+$		$2°$ degré
$f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$		
$f_2(x)$	1				1	
		$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$		

Sur la courbe représentative de f_1, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et la tangente de pente -1 en 0.

Sur la courbe représentative de f_2, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et en 0

b) $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de f_1 est $\dfrac{e-1}{e} > 0$ et l'équation n'a pas de solution positive

De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de f_2 est $\dfrac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car la fonction carré est strictement croisante sur $\mathbb{R}^+$ et que e et 4 en sont éléments).et l'équation (E_2) n'a pas de solution positive.

2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)

a) On a $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x}$. f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
En $+\infty$: $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x} = 1 - x^3/e^x \to 1$ car $x^3 = o(e^x)$ en $+\infty$.
La courbe représentative de f_3 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
Sens de variation : $f_3'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$ d'où :

x	0		3		$+\infty$	
$x-3$		$-$	0	$+$		affine
x^2	0	$+$		$+$		
$f_3'(x)$	0	$-$	0	$+$		
$f_3(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{9}{e^3}$	$\nearrow$	1	

Cette fois, comme $e^1 > 1^3$ alors $1/e < 1$ et $1 - \dfrac{1}{e} < 0$.
et $e^2 < 2^3$ donc
On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 < 0$
Comme f_3 est continue et strictement décroissante, elle est bijective de $]1,2[$ dans $\left]1-\frac{1}{e}, 1-\frac{8}{e^2}\right[$.
Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution u sur cet intervalle. $(1 < u < 2)$
De même comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, (E_3) a une unique solution v sur l'intervalle $]4,5[$.
Elle n'en a donc pas ailleur
Donc l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que$1 < u < 2$ et $4 < v < 5$

b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0,où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.

- $u < y_0 \le v$, alors par récurernce :
  soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u < y_n \le v$ comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors $3\ln(u) < 3\ln(y_n) \le 3\ln(v)$
  Et comme u et v positifs sont solutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a $3\ln(u) = u$ et $3\ln(v) = v$
  Donc $u < y_{n+1} \le v$
  Et la propriété estvraie pour tout entier n.
- De même par récurrence si $v \le y_0$, alors pour tout entier naturel n, $v \le y_n$.
- Signe ?
  $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_n > y_{n-1} \Leftrightarrow 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que y_{n-1} et y_n en sont éléments; et finalement $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_{+1} - y_n > 0$.
  De même pour =0 et pour < 0; Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et par récurrence du même signe que $y_1 - y_0$

Donc si $y_0 < y_1$ alors pour tout entier n, $y_n < y_{n+1}$ et si $y_0 > y_1$ alors pour tout entier n, $y_n > y_{n+1}$

- Or pour $u < y_0 \le v$ on a, d'après les variations def_0 : $f_3(y_0) \le 0$ donc $1 - y_0^3e^{-y_0} \le 0$ donc $e^{y_0} < y_0^3$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors $y_0 \le 3\ln(y_0)$ et $y_0 \le y_1$.
  Donc si $u < y_0 \le v$ alors pour tout entier n : $y_n \le y_{n+1}$ et la suite sera donc croissante.
- De même si $y_0 \ge v$ alors $f_3(y_0) \ge 0$ et la suite sera décroissante

Etudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n)

c) On choisit désormais $y_0 = 4$

Il faut saisir n puis calculer de y_1 à y_n :

```
program suite;
var i,n:integer;y:real;
begin
  writeln('jusqu''à?');readln(n);
  y:=4;
  for i:=1 to n do y:=3*ln(y);
  writeln(y);
end.
```

Avec $y_0 = 4 < v$, la suite y sera croissante. On aura pour tout entier $n : 4 \leq y_n \leq v$

Pour établir que pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$ on utilise l'inégalité des accroissements finis.

Il faut pour celà majorer la dérivée de $3\ln$ sur l'intervalle $[4, v]$

$$(3\ln)'(x) = \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} = 0,75 \text{ si } x \geq 4$$

Comme pour tout n, on a $4 \leq y_n \leq v$ on a alors $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$

Puis par récurrence on prouve que $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.

- Pour $n = 0$ on a $4 \leq y_0 \leq v \leq 5$ donc $v \leq 5$ et $-y_0 \leq -4$ donc $0 \leq v - y_0 \leq 1 = (0,75)^0$
- Soit $n \geq 0$ tel que $v - y_n \leq (0,75)^n$ alors $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n) \leq (0,75)^{n+1}$
- Donc par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5}prè, il suffit donc que $(0,75)^n \leq 10^{-5}$

Il faut calculer à la fois y_n et $(0,75)^n$ jusqu'à ce que cette puissance soit $\leq 10^{-5}$

```
program suite;
var n:integer;y,p:real;
begin
  y:=4;p:=1;
  repeat y:=3*ln(y);p:=p*0,75 until p<=1E-5
  writeln(y);
end.
```

d) Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(x_n/3)$ et la condition initiale x_0, où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v.

On remarque que $1 - x^3 e^{-x} = 0 \iff e^x = x^3 \iff e^{x/3} = x$ enpreant la racine cubique d epart et d'autre.

Donc u et v vérifient $e^{x/3} = x$

- si $u \leq x_0 < v$ alors par récurrence :
  soit $n \geq 0$ tel que $u \leq x_n \leq v$
  Comme la fonction $x \to \exp(x/3)$ est croissante sur $\mathbb{R}$
  $\exp(u/3) \leq \exp(x_n/3) \leq \exp(v/3)$ donc $u \leq x_{n+1} \leq v$.
  Conclusion : $\boxed{\text{par récurrence, pour tout entier } n : u \leq x_n \leq v.}$
- si $x_0 \leq u$,
  soit $n \geq 0$ tel que $x_n \leq u$ alors
  $\exp(x_n/3) \leq \exp(u/3)$ donc pour tout entier naturel n, $x_n \leq u$

- Si $x_n > x_{n-1}$ alors $\exp(x_n/3) > \exp(x_{n-1}/3)$ donc $x_{n+1} > x_n$. Et de même pour $x_n < x_{n-1}$
  Conclusion : $\boxed{\text{le signe de } x_{n+1} - x_n \text{ est le même que celui de } x_n - x_{n-1}}$

Il reste à déterminer le signe de $x_1 - x_0$ suivant la position de x_0 :

- si $0 \leq x_0 < u$ alors $f_3(x_0) > f_3(u) = 0$ car f_3 est décroissante sur $[0, u]$.
  Donc $1 - x_0^3 e^{-x_0} > 0$ et $1 > x_0^3 e^{-x_0}$ d'où $e^{x_0} > x_0^3$ et $\exp(x_0/3) = x_1 > x_0$ en prenant la racine cubique de part et d'autre.
  Conclusion : $\boxed{\text{si } 0 \leq x_0 < u \text{ alors } x_1 > x_0 \text{ et la suite est croissante}}$
- si $u < x_0 < v$ alors $f_3(x_0) < 0$ d'après les variations de f_3 sur $[u, v]$ et de la même façon que précédemment, $x_1 < x_0$
  $x_1 > x_0$comme précédemment
  Conclusion : $\boxed{\text{si } u < x_0 < v \text{ alors la suite est décroissante}}$
- *Conclusion :* $\boxed{\text{et- si } x_0 = u\text{, la suite est constante.}}$

Donc

- si $x_0 \leq u$, la suite x est croissante et majorée par u donc convergente vers une limite ℓ avec $0 \leq \ell \leq u$
  Et comme $x \to e^{x/3}$ est continue en ℓ (sur $\mathbb{R}$) on a $\exp(\ell/3) = \ell$ et donc $f_3(\ell) = 0$.
  Donc $\ell = u$ ou v et comme $\ell \leq u$ alors $\ell \neq v$ et par élimination
  Conclusion : $\boxed{\text{si } x_0 \leq u \text{ la suite } x \text{ converge vers } u}$
- si $u < x_0 < v$ alors la suite est décroissante et minorée par u donc converge vers une limite ℓ avec $u \leq \ell \leq v$ (les inégalités s'élargissent à la limite)
  Pour séparer ℓ de v, il faut introduire un intermédiiaire fixe : $u \leq \ell \leq x_0$ (car la suite est décroissante)
  Donc $\ell \neq v$ et $\ell = u$
  Conclusion : $\boxed{\text{si } u < x_0 < v \text{ alors la suite converge vers } u}$

e) On choisit désormais $x_0 = 2$ et donc $u < x_0 < v$

On utlise l'inégalité des accroisssements finis :

$g(x) = \exp(x/3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{3}\exp(x/3)$.

Et puisque $u < 2$, pour $x \in [u, 2] : 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}\exp\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0,649 \leq 0,65$

Et comme $x_n \geq u$ l'inégalité des acroissements finis

puisque $0 \leq g(x_n) - g(u) \leq 0,65\,(x_n - u)$

Conclusion : $\boxed{\text{et pour tout entier naturel } n \text{ que } 0 \leq x_{n+1} - u \leq 0,65(x_n - u)}$

Conclusion : $\boxed{\text{et on aura } 0 \leq x_n - u \leq 0,65^n \text{ par récurrence.}}$

Ecrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de x_n pour un entier n donné.

```
program suite;
var n,k:integer;x:real;
begin
  x:=2;
  writeln('n?');readln(n);
  for k:=1 to n do x:=exp(x/3);
  writeln(x);
end.
```

Pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5}près, il suffit que $0,65^n \leq 10^{-5}$.

soit $n \geq -5\ln(10)/\ln(0,65)$

3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.

a) On a $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$. f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
En $+\infty$: $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x} = 1 - x^n/e^x \to 1$ car $x^n = o(e^x)$ en $+\infty$.
La courbe représentative de f_n a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
Sens de variation : $f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^n(x-n)e^{-x}$ d'où :

x	0		n		$+\infty$
$x-n$		$-$	0	$+$	affine
x^{n-1}	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	1

Cette fois, comme $n \geq 3 > e$ alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1^n$ car $n > 0$ et la fonction puissance n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
Donc $f_n(n) < 0$.
Comme $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, $f_n > 0$ sur $[0,1]$ et (E_n) n'a pas de solution.
Sur $]1,n[$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante. Elle est donc bijective de $]1,n[$ dans $]\lim_n f_n; \lim_1 f_n[$.
et comme $0 \in \left]f_n(n); 1 - \frac{1}{e}\right[$ l'équation $f_n(x) = 0$ qui équivaut à (E_n) a une unique solution u_n sur $]1,n[$.
De même sur l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution v_n sur $[n, +\infty[$
Donc l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < n < v_n$.

b) Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on fait intervenir $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n - 1 \geq 3$ donc $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \\
f_n(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\
f_n(u_{n-1}) &= f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1}) \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1}) < 0
\end{aligned}$$

car $1 < u_{n-1}$. Donc pour tout entier $n \geq 4$ on a : $f_n(u_{n-1}) < 0$
On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$
Et comme f_n est strictement décroissante sur $[0,n]$ et que u_n et u_{n-1} ($\leq n-1$) en sont éléments alors $u_{n-1} > u_n$
La suite u est donc décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit L sa limite.

c) On a $n \ln(u_n) = u_n$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et $u_n = \exp(u_n/n)$
Or $u_n/n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ donc $u_n \to e^0 = 1 = L$ (car exp est continue en 0)
Comme $u_n - L = u_n - 1 = \exp(u_n/n) - 1$ et que $e^X - 1 \sim X$ quand $X \to 0$ alors $u_n - L \sim u_n/n \sim 1/n$

d) On a comme pour u_n

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(v_n) &= f_{n-1}(v_n) - f_n(v_n) \\
&= (v_n)^n e^{-v_n} - (v_n)^{n-1} e^{-v_n} \\
&= (v_n)^{n-1} e^{-v_n} (v_n - 1) > 0
\end{aligned}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$. Et comme f_{n-1} est strictement croissante sur $[n-1, +\infty[$ et que v_n ($\geq n \geq n-1$) et v_{n-1}en sont éléments alors $v_{n-1} < v_n$.

La suite v est donc croissante

Comme $v_n > n$ on a par minoration $v_n \to +\infty$

e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \\ g(1) &= 0 \end{aligned}$$

Comme g est strictement croissante et conitnue sur $]1, +\infty[$ alors g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]\lim_1 g, \lim_{+\infty} g[=]1, +\infty[$

Elle a donc une réciproque.

On a $(v_n)^n = e^{v_n}$ donc en élevant à la puissance $1/n$: $v_n = e^{v_n/n}$

$$\begin{aligned} g(v_n/n) &= \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(e^{v_n/n}\right) + \ln(n) \\ &= \frac{v_n}{n} - v + \ln(n) = \ln(n) \end{aligned}$$

Comme $v_n/n \in]1, +\infty[$ (car $v_n > n$) et que $\ln(n) \in]1, +\infty[$ (car $n > e$) alors

$$g(v_n/n) = \ln(n) \Leftrightarrow \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

Or, comme $y = g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \to +\infty$ quand $y \to +\infty$.

Donc $g(\ln(n)) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et $v_n/n \to +\infty$.

Pour avoir un équivalent de v_n, on repart de la relation $v_n/n = g^{-1}(\ln(n))$ d'où $v_n = n \cdot g^{-1}(\ln(n))$

Reste à trouver un équivalent simple de g^{-1} en $+\infty$.

Pour celà on part de $g(x) = x - \ln(x) = x(1 - \ln(x)/x)$ et comme $\ln(x)/x \to 0$ quand $x \to +\infty$ alors $g(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$

Donc $\dfrac{g(x)}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$. Avec $x = g^{-1}(y)$ qui tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$ on a on :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{y}{g^{-1}(y)} \to 1$$

et donc $g^{-1}(y) \sim y$. On a alors $g^{-1}(\ln(n)) \sim \ln(n)$

d'où finalement $v_n = n \cdot g^{-1}(\ln(n)) \sim n \cdot \ln(n)$

B]ETUDE DES RACINES NEGATIVES DE (En)

1. Existence des racines négatives de (E_n)

a) pour les pairs :

On a

$$\begin{aligned} f'_{2k}(x) &= \left(-2kx^{2k-1} + x^{2k}\right)e^{-x} \\ &= (-2k + x)\,x^{2k-1}e^{-x} \end{aligned}$$

avec $x - 2k < 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et x^{2k-1} également (sauf en 0)car la puissance est impaire.
Donc f_{2k} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.
en $-\infty$: $f_{2k}(x) = 1 - x^{2k}e^{-x} \to -\infty$ et $f(0) = 1$
Pour les impairs.
On a

$$\begin{aligned} f_{2k}'(x) &= \left(-(2k+1)x^{2k} + x^{2k+1}\right)e^{-x} \\ &= \left(-(2k+1) + x\right)x^{2k}e^{-x} < 0 \end{aligned}$$

Donc f_{2k+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
en $-\infty$: $f_{2k+1}(x) = 1 - x^{2k+1}e^{-x} \to +\infty$ et $f(0) = 1$
Donc $f_{2k+1} > 0$ sur $\mathbb{R}^-$

b) Donc f_n n'admet pas de racine négative négative si n est impair.
Et par bijection elle en admet une unique si n est pair.

2. Etude des racines négatives de l'équation (E_{2n})

a) On essaye, au plus simple : en -1
$f_{2n}(-1) = 1 - (-1)^{2n}e^1 < 0 = f_{2n}(w_n)$ et comme f_{2n} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$
Conclusion : $\boxed{-1 < w_n < 0}$
On connait $f_{2n-2}(w_{n-1}) = 1 - (w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} = 0$ donc $(w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} = 1$
que l'on fait réapparaîter dans

$$\begin{aligned} f_{2n}(w_{n-1}) &= 1 - (w_{n-1})^{2n}e^{-w_{n-1}} \\ &= 1 - (w_{n-1})^2(w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} \\ &= 1 - (w_{n-1})^2 > 0 \end{aligned}$$

car $-1 < w_{n-1} < 0$ et la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
Conclusion : $\boxed{f_{2n}(w_{n-1}) > 0}$

b) On a donc $f_{2n}(w_{n-1}) > 0 = f_{2n}(w_n)$ et comme f_{2n} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et que les deux termes y sont, $w_{n-1} > w_n$.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } w \text{ est décroissante}}$
Comme elle est minorée par -1, elle est convergente vers une limite $L \geq -1$.
on se souvient que $0 = f_{2n}(w_n) = 1 - (w_n)^{2n}e^{-w_n}$
et comme $w_n \to L$ alors

- **si** $0 < L \leq 0$ alors $L^{2n} \to 0$ et $1 - (w_n)^{2n}e^{-w_n} \to 1$ tout en étant nul ...
- donc $L = -1$

Conclusion : $\boxed{w \text{ converge vers } -1}$
$1 - (w_n)^{2n}e^{-w_n} = 0$ donc $w_n = \exp(w_n/2n)$ donc $w_n - 1 = \exp\left(\frac{w_n}{2n}\right) - 1 \sim \frac{w_n}{2n} \sim \frac{-1}{2n}$
Conclusion : $\boxed{w_n - (-1) \sim \frac{-1}{2n} \text{ quand } n \to +\infty}$