ESCP M I 2004

Partie I Résultats généraux et exemples d'éléments de E.

Q1 f n'est pas la fonction nulle donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $f(a) \neq 0$.

Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée à f.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n f(a) = s_n f\left(n \frac{a}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{n}\right)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \frac{1}{f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{n}\right)$. D'où l'unicité de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Notons que $s_1 = \frac{1}{f(a)} \sum_{k=0}^{0} f\left(\frac{a}{1} + \frac{k}{1}\right) = \frac{1}{f(a)} f(a) = 1$.

<u>Si f est un élément non nul de E, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ adaptée à f et une seule, de plus $s_1 = 1$.</u>

Q2 Soit f une fonction dérivable de E. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite adaptée à f.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx)$.

En dérivant il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n\, n f'(nx)$.

Alors f' appartient à E et $(n s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f'.

<u>Si f est une fonction dérivable de E et si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f, f' appartient à E et $(n s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f'.</u>

Q3 Soit f une fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = n\lambda = n f(nx)$. Ainsi f appartient à E et $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f.

<u>Les fonctions constantes appartiennent à E.</u>

(Q4) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}) = n(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = nx - \frac{n}{2} + \frac{1}{n}\frac{(n-1)n}{2} = nx - \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}) = f(nx)$. f appartient à E et $(1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f. <u>$x \mapsto x - \frac{1}{2}$ appartient à E.</u>

(Q5) Supposons que E constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$x \mapsto x - \frac{1}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}$ sont deux éléments de E d'après Q3 et Q4 donc $x \mapsto x$ appartient à E. Alors il existe une suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1}(x+\frac{k}{n}) = \Delta_n(nx)$.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(0+\frac{k}{n}) = \Delta_n(n\times 0) = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = 0$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\times\frac{(n-1)\times n}{2} = 0$; donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n-1=0$!!

Cette légère contradiction indique que :

<u>E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.</u>

<u>Remarque</u>.. Notons néanmoins que : <u>$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \lambda f \in E$.</u>

(Q6) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit x un réel.

<u>1er cas</u>.. $nx \in \mathbb{Z}$. Posons $i = nx$. $i \in \mathbb{Z}$ et $x = \frac{i}{n}$.

Montrons qu'il existe un unique élément $\hat{k}$ de $[\![0,n-1]\!]$ tel que $x + \frac{\hat{k}}{n} \in \mathbb{Z}$.

Unicité.. Soit $\hat{k}$ dans $[\![0,n-1]\!]$ tel que $x+\frac{\hat{k}}{n} \in \mathbb{Z}$. Posons $q = x + \frac{\hat{k}}{n} = \frac{i+\hat{k}}{n}$.

$\hat{k} = nq - i \in [\![0,n-1]\!]$. $0 \leq nq - i < n$; $0 \leq q - \frac{i}{n} < 1$; $-q \leq -\frac{i}{n} < -q+1$

Alors $-q = E(-\frac{i}{n})$ et donc $\hat{k} = nq - i = -nE(-\frac{i}{n}) - i$; d'où l'unicité.

Notons que $\hat{k}$ vaut encore $-nE(-x) - nx$

<u>Existence</u> .. Posons $\hat{k} = -nE(-\frac{i}{n}) - i$. <u>$\hat{k}$ appartient à $\mathbb{Z}$</u>. Montrons que $x+\frac{\hat{k}}{n} \in \mathbb{Z}$ et que $\hat{k} \in [\![0, n-1]\!]$.

$x+\frac{\hat{k}}{n} = \frac{i}{n}+\frac{\hat{k}}{n} = \frac{1}{n}(i+\hat{k}) = \frac{1}{n}\left(-nE(-\frac{i}{n})\right) = -E(-\frac{i}{n}) \in \mathbb{Z}$; <u>$x+\frac{\hat{k}}{n} \in \mathbb{Z}$</u>.

$E(-\frac{i}{n}) \leq -\frac{i}{n} < E(-\frac{i}{n})+1$; $-nE(-\frac{i}{n}) \geq i > -nE(-\frac{i}{n}) - n$;

$-nE(-\frac{i}{n}) - i \geq 0 > -nE(-\frac{i}{n}) - i - n$; $\hat{k} \geq 0 > \hat{k} - n$; <u>$0 \leq \hat{k} < n$</u>.

Comme $\hat{k} \in \mathbb{Z}$: <u>$\hat{k} \in [\![0, n-1]\!]$</u>. D'où l'existence.

Ainsi $\exists!\, \hat{k} \in [\![0, n-1]\!]$, $x + \frac{\hat{k}}{n} \in \mathbb{Z}$.

<u>Remarque</u> .. On peut encore obtenir l'existence et l'unicité de $\hat{k}$
→ en utilisant l'existence et l'unicité du reste dans la division euclidienne ($\hat{k}$ est le reste dans la division de $-nx = -i$ par n).

<u>ou</u> → en remarquant que $nx, nx+1, \dots, nx+(n-1)$ sont n entiers consécutifs donc un et un seul est un multiple de n.

Alors $\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x+\frac{k}{n}) = \chi(x+\frac{\hat{k}}{n}) = 1$. Observons que dans ce cas $\chi(nx) = 1$.

<u>2ième cas</u> .. $nx \notin \mathbb{Z}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$x+\frac{k}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow nx+k \in \mathbb{Z} \Rightarrow nx \in \mathbb{Z}$! Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x+\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z}$.

Par conséquent $\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x+\frac{k}{n}) = 0$ ... dans ce cas $\chi(nx) = 0$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x+\frac{k}{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } nx \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\chi(nx) = \begin{cases} 1 & \text{si } nx \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x+\frac{k}{n}) = \chi(nx)$.

<u>χ appartient à E et la suite adaptée à χ est la suite constante égale à 1.</u>

Q7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Posons $z = e^{\frac{2ip\pi}{n}}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})} = e^{2ip\pi x}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k = e^{2ip\pi x}\sum_{k=0}^{n-1} z^k .$$

1er cas : $z = 1$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})} = e^{2ip\pi x}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n e^{2ip\pi}$.

2ème cas : $z \neq 1$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})} = e^{2ip\pi x}\frac{1-z^n}{1-z} = 0$ car $z^n = e^{2ip\pi} = 1$.

Notons alors que : $z = 1 \iff e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2p\pi}{n} \equiv 0\,[2\pi] \iff \frac{p}{n} \equiv 0\,[1] \iff p \equiv 0\,[n]$.

Ainsi $z = 1$ si et seulement si p est un multiple de n.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})} = \begin{cases} n e^{2ip\pi x} & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2p\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})}\right) = \begin{cases} \mathrm{Re}(n e^{2ip\pi x}) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2p\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \begin{cases} n\cos(2p\pi x) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \cos(2\pi x)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} u\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\times 1\times \pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \begin{cases} n\cos(2\times 1\times \pi x) & \text{si } 1 \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que 1 est un multiple de n si et seulement si $n = 1$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u\left(x+\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u\left(x+\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \cos(2\pi n x) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{\ell=0}^{n-1} u(x+\frac{\ell}{n}) = \delta_n\, u(nx)$.

Ainsi $u: x\mapsto \cos(2\pi x)$ appartient à E et la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est adaptée à u.

c) Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall q\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^q$.

Or la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^q$ est convergente ($|\frac{1}{2}|<1$). Les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $\left|\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)\right|$.

Pour tout réel x la série de terme général $\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$ est absolument convergente donc convergente.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} v(x+\frac{\ell}{n}) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{\ell}{n})) \overset{(*)}{=} \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\sum_{\ell=0}^{n-1}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{\ell}{n}))$$

(*) la somme de la somme de n séries convergentes est la somme de chacune des sommes de ces séries !

Soit $q\in\mathbb{N}$. $\sum_{\ell=0}^{n-1}\cos(2^{q+1}\pi(x+\frac{\ell}{n})) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\cos(2\times 2^q\pi(x+\frac{\ell}{n})) = \begin{cases} n\cos(2\times 2^q\pi x) & \text{si } 2^q \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notons alors que si 2^q est un multiple de n nécessairement n est une puissance de 2.

Envisageons alors deux cas.

__1er cas.__ n est une puissance de 2. $\exists r\in\mathbb{N}$, $n=2^r$.

Alors si $q\in\mathbb{N}$: 2^q multiple de $n \Leftrightarrow 2^r$ divise $2^q \Leftrightarrow r\leq q$. Ainsi :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} v(x+\frac{\ell}{n}) = \sum_{q=r}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\, n\cos(2^{q+1}\pi x) = \sum_{q=r}^{+\infty}\frac{2^r}{2^q}\cos(2^{q-r+1}\pi\, 2^r x)$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} v(x+\frac{\ell}{n}) = \sum_{q=r}^{+\infty}\frac{1}{2^{q-r}}\cos(2^{q-r+1}\pi n x) = \sum_{q'=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{q'}}\cos(2^{q'+1}\pi n x) = v(nx).$$

2ème cas.. n n'est pas une puissance de 2.

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} v\left(x+\frac{\ell}{n}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\sum_{\ell=0}^{n-1}\cos\left(2^{q+1}\pi\left(x+\frac{\ell}{n}\right)\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}\times 0=0=0\times v(nx)\ !$$

Si l'on pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \delta_n=\begin{cases}1 \text{ si } n \text{ est une puissance de } 2\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Ce qui précède indique que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{\ell=0}^{n-1} v\left(x+\frac{\ell}{n}\right)=\delta_n v(nx)$

Ainsi v appartient à E et la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ adaptée à v est définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \delta_n=\begin{cases}1 \text{ si } n \text{ est une puissance de } 2\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Partie II Recherche des polynômes éléments de E

Q1 a) Soit P un polynôme de degré 1 élément de E et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite adaptée à P.

$\exists (a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=ax+b.$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ 0=\sum_{\ell=0}^{n-1}P\left(x+\frac{\ell}{n}\right)-\delta_n P(nx)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(a\left(x+\frac{\ell}{n}\right)+b\right)-\delta_n(anx+b).$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ 0=nax+\frac{a}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell+nb-\delta_n anx-\delta_n b=an(1-\delta_n)x+\frac{a}{n}\frac{(n-1)n}{2}+nb-\delta_n b.$$

Rappelons qu'un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}an(1-\delta_n)=0\\ (n-1)\frac{a}{2}+(n-\delta_n)b=0\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}\delta_n=1\\ (n-1)\left(\frac{a}{2}+b\right)=0\end{cases}$ car $a\neq 0$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \delta_n=1$ et $\frac{a}{2}+b=0$ (ou $b=-\frac{a}{2}$)

Si P est un polynôme de degré 1 élément de E 1) la suite adaptée à P est constante égale à 1

2) $\exists a\in\mathbb{R}^*,\ P=a\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

b) • Nous venons de voir que si P est un polynôme de degré 1 élément de E, il existe un réel non nul tel que $P = a(X - \frac{1}{2})$.

• Réciproquement soit a un réel non nul. $a(X - \frac{1}{2})$ est un polynôme de degré 1.
Nous avons vu que $X - \frac{1}{2}$ appartient à E et remarqué que le produit d'un élément de E par un réel est encore un élément de E. Ainsi $a(X - \frac{1}{2})$ est un élément de E.

L'ensemble des polynômes de degré 1 élément de E est $\{a(X - \frac{1}{2}),\ a \in \mathbb{R}^*\}$

Q2 $\exists (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $a_p \neq 0$.

a) Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite adaptée à P. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} P(x + \frac{k}{n}) = s_n P(nx)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{p} a_i (x + \frac{k}{n})^i = s_n \sum_{i=0}^{p} a_i (nx)^i$

Alors $\sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{k=0}^{n-1} (X + \frac{k}{n})^i = s_n \sum_{i=0}^{p} a_i n^i X^i$.

Le coefficient de X^p dans $\sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{k=0}^{n-1} (X + \frac{k}{n})^i$ est le coefficient de X^p dans $a_p \sum_{k=0}^{n-1} (X + \frac{k}{n})^p$;

c'est donc $a_p n$ (car le coefficient de X^p dans $(X + \frac{k}{n})^p$ est 1).

Le coefficient de X^p dans $s_n \sum_{i=0}^{p} a_i n^i X^i$ est $s_n a_p n^p$.

Alors $n a_p = s_n a_p n^p$ ou $1 = s_n n^{p-1}$ car $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_p \in \mathbb{R}^*$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$.

Si P est un polynôme de degré p appartenant à E la suite adaptée à P est $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Remarque.. Nous retrouvons pour $p = 0$ un résultat vu dans I Q 3.

b) Supposons p dans $\mathbb{N}^*$. P est continue sur $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} s_n P(n \times 0)\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^p} P(0)\right) \underset{\uparrow}{=} 0$$
$p \in \mathbb{N}^*$

Si P est un polynôme, de degré p non nul, appartenant à E : $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$.

(Q3) Soit φ un polynôme. Soit P_φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. $P_\varphi \in \mathbb{R}[X]$.
Montrons qu'il existe un polynôme P et un seul tel que $P' = \varphi$ et $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$.

→ Soit P un polynôme tel que $P' = \varphi$ et $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = P_\varphi + \lambda$. $0 = \int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 (P_\varphi(t) + \lambda)\,dt = \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt + \lambda$

Ainsi $\lambda = -\int_0^1 P_\varphi(t)\,dt$ et $P = P_\varphi - \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt$. D'où l'unicité de P.

→ Réciproquement posons $P = P_\varphi - \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt$.

P_φ est un polynôme donc P est également un polynôme. $P' = P'_\varphi - 0 = \varphi$.

$\int_0^1 P(x)\,dx = \int_0^1 \left(P_\varphi(x) - \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt\right) dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 P_\varphi(x)\,dx - \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt = 0$.

D'où l'existence de P. $\qquad \int_0^1 P_\varphi(t)\,dt$ est une constante !

$\forall \varphi \in \mathbb{R}[X]$, $\exists !\, P \in \mathbb{R}[X]$, $P' = \varphi$ et $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$.

(Q4) a) Montrons par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\deg B_p = p$ et le coefficient de X^p dans B_p est 1.

→ C'est vrai pour $p = 0$ car $B_0 = 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p-1$ avec p élément de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour p.

$B'_p = p\, B_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\deg B_{p-1} = p-1$. Alors $\deg B'_p = p-1$ donc $\deg B_p = p$. Notons S_p le coefficient de X^p dans B_p.

$p\,S_p$ est le coefficient de X^{p-1} dans B'_p donc dans $p\,B_{p-1}$.

Par hypothèse de récurrence le coefficient de X^{p-1} dans B_{p-1} est 1. Ainsi $p\,S_p = p$.

Alors $S_p = 1$ et la récurrence s'achève.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, B_p est un polynôme unitaire ou normalisé de degré p.

b) B_1 est unitaire et de degré 1 donc $\exists b \in \mathbb{R}$, $B_1 = X + b$.

$$0 = \int_0^1 B_1(t)\,dt = \int_0^1 (t+b)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} + bt\right]_0^1 = \frac{1}{2} + b \; ; \quad b = -\frac{1}{2}. \quad \underline{\underline{B_1 = X - \frac{1}{2}}} \text{ ... normal !}$$

$B_2' = 2B_1 = 2X - 1$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $B_2 = X^2 - X + \lambda$.

$$0 = \int_0^1 B_2(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \lambda t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \lambda = -\frac{1}{6} + \lambda \; ; \; \lambda = \frac{1}{6}.$$

$$\underline{\underline{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}.}}$$

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_2\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(x+\frac{k}{n}\right)^2 - \left(x+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x^2 + \left(2\frac{k}{n}\right)x + \frac{k^2}{n^2} - x - \frac{k}{n} + \frac{1}{6}\right).$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_2\left(x+\frac{k}{n}\right) = n\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{1}{n}\,\frac{(n-1)n}{2} + \frac{2}{n}\,\frac{(n-1)n}{2}\,x.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_2\left(x+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left((nx)^2 - n^2x + \frac{n^2}{6} + \frac{1}{6}(n-1)(2n-1) - \frac{n^2-n}{2} + (n^2-n)x\right).$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_2\left(x+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[(nx)^2 - nx + \frac{1}{6}\left(n^2 + (2n^2-3n+1) - 3(n^2-n)\right)\right] = \frac{1}{n}\left[(nx)^2 - nx + \frac{1}{6}\right].$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_2\left(x+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\, B_2(nx)$.

Alors $\underline{\underline{B_2 \text{ est élément de } E}}$. La suite adaptée à B_2 est $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ... mais nous le savions déjà !

Ici $p \in \mathbb{N}^*$.

Q6 a) $\varphi - \psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\varphi - \psi$ est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; (\varphi-\psi)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n^{p-1}}\, B_p(nx).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; (\varphi-\psi)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p'\left(x+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n^{p-1}}\, n\, B_p'(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} p\, B_{p-1}\left(x+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n^{p-2}}\, p\, B_{p-1}(nx).$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ (\varphi-\psi)'(x)=p\left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}(x+\frac{k}{n})-\frac{1}{n^{p-2}}B_{p-1}(nx)\right)$.

L'hypothèse de récurrence indique que B_{p-1} est élément de E. II Q2 a nous autorise alors à dire que la suite associée à B_{p-1} est $\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ car B_{p-1} est un polynôme de degré $p-1$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}(x+\frac{k}{n})-\frac{1}{n^{p-2}}B_{p-1}(nx)=0$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ (\varphi-\psi)'(x)=0$. $\varphi-\psi$ est dérivable et de dérivée nulle sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$ donc $\varphi-\psi$ est constante sur $\mathbb{R}$.

b) $$\int_0^{1/n}\varphi(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{1/n}B_p(x+\frac{k}{n})dx \underset{u=x+\frac{k}{n}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}B_p(u)du \overset{\text{chasles}}{=}\int_0^1 B_p(u)du \overset{p\in\mathbb{N}^*}{=}0$$

$$\int_0^{1/n}\psi(x)dx=\frac{1}{n^{p-1}}\int_0^{1/n}B_p(nx)dx \underset{u=nx}{=}\frac{1}{n^{p-1}}\int_0^1 B_p(u)\frac{1}{n}du=\frac{1}{n^p}\int_0^1 B_p(u)du=0.$$

Ainsi $\int_0^{1/n}\varphi(x)dx=\int_0^{1/n}\psi(x)dx=0$.

c) $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\varphi-\psi)(x)=\lambda$.

Alors $0=0-0=\int_0^{1/n}\varphi(x)dx-\int_0^{1/n}\psi(x)dx=\int_0^{1/n}(\varphi-\psi)(x)dx=\int_0^{1/n}\lambda\,dx=\frac{\lambda}{n}$.

$\frac{\lambda}{n}=0$ donc $\lambda=0$. $\varphi-\psi$ est nulle.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1}B_p(x+\frac{k}{n})-\frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx)=0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1}B_p(x+\frac{k}{n})=\frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx)$. Par conséquent $B_p\in E$.

Finalement, si p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et si B_{p-1} appartient à E, alors B_p appartient à E.

Comme B_0 appartient à E, ce qui précède et le principe de récurrence permettent de dire que : $\forall p\in\mathbb{N},\ B_p\in E$.

(Q 7) $\to$ Soit p un élément de $\mathbb{N}$.

B_p est un polynôme de degré p qui appartient à E.

Clairement, pour tout élément λ de $\mathbb{R}^*$, λB_p est encore un polynôme de degré p qui appartient à E.

$\to$ Réciproquement montrons par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}$, si P est un polynôme de degré p appartenant à E, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda B_p$.

- Soit P un polynôme de degré 0 appartenant à E. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda$.

  Comme $B_0 = 1$: $P = \lambda B_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La propriété est vraie pour $p = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour $p-1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons la pour p.

  Soit P un polynôme de degré p appartenant à E.

  P' est un polynôme de degré $p-1$ appartenant à E (I Q 2).

  Alors $\exists \lambda' \in \mathbb{R}^*$, $P' = \lambda' B_{p-1}$. $p P' = \lambda' p B_{p-1} = \lambda' B'_p$. $P' = \frac{\lambda'}{p} B'_p$.

  $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $P = \frac{\lambda'}{p} B_p + \gamma$.

  P appartient à E et P est un polynôme de degré p non nul donc $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ d'après II Q 2 b).

  Ainsi $0 = \int_0^1 P(t)\,dt = \frac{\lambda}{p} \int_0^1 B_p(t)\,dt + \gamma \overset{\Downarrow}{=} \gamma$ ($\int_0^1 B_p(t)\,dt = 0$ car $p \in \mathbb{N}^*$.)

  Alors $\gamma = 0$ et $P = \frac{\lambda'}{p} B_p$. Posons $\lambda = \frac{\lambda'}{p}$. $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $P = \lambda B_p$.

Ceci achève la récurrence.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, si P est un polynôme de degré p appartenant à E : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda B_p$

<u>Finalement, pour tout p dans $\mathbb{N}$, les polynômes de degré p qui appartiennent à E sont exactement les polynômes λB_p obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.</u>

PARTIE III Etude des fonctions indéfiniment dérivables de E

Q1) a) Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

$\forall x\in\mathbb{R},\ S(\lambda\varphi_1+\varphi_2)(x)=(\lambda\varphi_1+\varphi_2)(x+1)-(\lambda\varphi_1+\varphi_2)(x)=\lambda(\varphi_1(x+1)-\varphi_1(x))+\varphi_2(x+1)-\varphi_2(x).$

$\forall x\in\mathbb{R},\ S(\lambda\varphi_1+\varphi_2)(x)=\lambda S(\varphi_1)(x)+S(\varphi_2)(x)=(\lambda S(\varphi_1)+S(\varphi_2))(x).$

Ainsi $S(\lambda\varphi_1+\varphi_2)=\lambda S(\varphi_1)+S(\varphi_2)$.

S est linéaire.

Soit φ un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $S(\varphi)=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x+1)-\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x+1)=\varphi(x)$.

Les éléments de Ker φ sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodiques.

b) Soit P une fonction polynômiale.

1er cas.. deg $P<1$. Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ P=\lambda$. P est 1-périodique !

Ainsi $S(P)=0$. $S(P)$ est une fonction polynômiale.

2ème cas.. deg $P\geqslant 1$. $\exists p\in\mathbb{N}^*, \exists(a_0,a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$, $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $a_p\neq 0$.

$$S(P)=\sum_{k=0}^{p}a_k(X+1)^k-\sum_{k=0}^{p}a_kX^k=\sum_{k=0}^{p}a_k\left((X+1)^k-X^k\right)=\sum_{k=1}^{p}a_k\left(\sum_{i=0}^{k}C_k^iX^i-X^k\right).$$

$$S(P)=\sum_{k=1}^{p}a_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^iX^i\right)=\sum_{i=0}^{p-1}\left(\sum_{k=i+1}^{p}C_k^ia_k\right)X^i.$$

Alors 1°.. $S(P)$ est une fonction polynômiale.

2°.. deg $S(P)\leqslant p-1$

3°.. le coefficient de X^{p-1} dans $S(P)$ est $\sum_{k=p-1+1}^{p}C_k^{p-1}a_k=C_p^{p-1}a_p=pa_p$.

- Pour toute fonction polynômiale P, $S(P)$ est une fonction polynômiale.
- Si P est une fonction polynômiale de degré p supérieur ou égal à 1 et de coefficient dominant a_p, $S(P)$ est une fonction polynômiale de degré $p-1$ et de coefficient dominant pa_p.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta_n S(f)(nx) = \Delta_n f(nx+1) - \Delta_n f(nx) = \Delta_n f(n(x+\tfrac{1}{n})) - \Delta_n f(nx)$$

$$\Delta_n S(f)(nx) \underset{f \in E}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+\tfrac{1}{n}+\tfrac{k}{n}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x+\tfrac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} f(x+\tfrac{k}{n}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x+\tfrac{k}{n}) = f(x+1)-f(x)$$
$$= S(f)(x)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta_n S(f)(nx) = S(f)(x).$

(Q3) a) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha^k g(x) = g(\tfrac{x}{2^k}).$$

→ C'est clair pour $k=0$ (enfin presque ! si $\alpha=0$?!)

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$\alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k})$. Ainsi $\alpha^{k+1} g(x) = \alpha\, g(\frac{x}{2^k}) = \alpha\, g(2\,\frac{x}{2^{k+1}}) \underset{(3)}{=} g(\frac{x}{2^{k+1}})$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k})$.

b) Supposons $\alpha = 0$. (3) donne $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$. g est nulle.

Si $\alpha = 0$: g est nulle.

c) Supposons $|\alpha| > 1$. Soit x un réel.

$\forall k \in \mathbb{N}, g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k g(\frac{1}{2^k}x)$. $\lim_{k\to+\infty}(\frac{1}{2^k}x) = 0$ et g est continue en 0

donc $\lim_{k\to+\infty} g(\frac{1}{2^k}x) = g(0)$; de plus $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$ donc $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = 0$.

Par produit $\lim_{k\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k g(\frac{1}{2^k}x)\right) = 0 \times g(0) = 0$.

La suite $\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k g(\frac{1}{2^k}x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $g(x)$ et converge vers 0 donc $g(x)=0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$. Si $|\alpha| > 1$, g est nulle.

d) $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\alpha g(2x)$.

Une récurrence très simple donne $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g^{(p)}(x)=2^p\alpha\, g^{(p)}(2x)$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. $|2^p\alpha|>1 \Leftrightarrow 2^p>\dfrac{1}{|\alpha|} \Leftrightarrow p\ln 2>-\ln|\alpha| \Leftrightarrow p>-\dfrac{\ln|\alpha|}{\ln 2}$.

Observons que $-\dfrac{\ln|\alpha|}{\ln 2}>0$ et posons $p=\left[-\dfrac{\ln|\alpha|}{\ln 2}\right]+1$. ▲ $-\dfrac{\ln|\alpha|}{\ln 2}\geqslant 0$

Alors $p\in\mathbb{N}$ et $p>-\dfrac{\ln|\alpha|}{\ln 2}$ donc $|2^p\alpha|>1$. Posons $\beta=2^p\alpha$.

$|\beta|>1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \beta\, g^{(p)}(2x)=2^p\alpha\, g^{(p)}(2x)=g^{(p)}(x)$.

$\exists p\in\mathbb{N},\ \exists\beta\in\mathbb{R},\ |\beta|>1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \beta\, g^{(p)}(2x)=g^{(p)}(x)$.

e) Si $\alpha=0$ et si $|\alpha|>1$, g est nulle donc g est polynômiale.

Supposons $0<|\alpha|\leq 1$.

$\exists p\in\mathbb{N},\ \exists\beta\in\mathbb{R},\ |\beta|>1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \beta\, g^{(p)}(2x)=g^{(p)}(x)$.

Comme $g^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c) autorise à dire que $g^{(p)}$ est nulle.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à g à l'ordre p ▲ donne :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\sum_{\ell=0}^{p}\frac{(x-0)^\ell}{\ell!}g^{(\ell)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^p}{p!}g^{(p+1)}(t)\,dt$$

$g^{(p)}$ est nulle donc $g^{(p+1)}$ est également nulle.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{p}\frac{g^{(\ell)}(0)}{\ell!}x^\ell$; g est polynômiale.

▲ L'ordre $p-1$ convient... pourvu que $p\geqslant 1$ ... d'où l'idée de choisir p !!

Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\exists\alpha\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \alpha g(2x)=g(x)$ alors g est polynômiale.

(Q4) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $S(f)(x)=f(x+1)-f(x)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $S(f)$.

$f\in E$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_n S(f)(nx)=S(f)(x)$. (Q1)

En particulier $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_{\underline{2}}\, S(f)(2x)=S(f)(x)$. Q3 permet alors de dire que $S(f)$ est polynomiale.

Comme $S(f)$ n'est pas nulle par hypothèse : $\underline{\underline{S(f)\text{ est une fonction polynomiale non nulle.}}}$

$q=\deg S(f)$.

b) $\exists (a_0,a_1,\dots,a_q)\in\mathbb{R}^{q+1}$, $a_q\neq 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $S(f)(x)=\sum_{k=0}^{q} a_k x^k$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{q} a_k x^k = S(f)(x)=\lambda_n S(f)(nx)=\lambda_n \sum_{k=0}^{q} a_k (nx)^k$.

Alors $\sum_{k=0}^{q} a_k X^k = \lambda_n \sum_{k=0}^{q} a_k n^k X^k$. Donc $\forall k\in[\![0,q]\!]$, $a_k=a_k n^k\lambda_n$.

En particulier $a_q=a_q n^q \lambda_n$. Comme $a_q\neq 0$ et $n^q\neq 0$: $\lambda_n=\frac{1}{n^q}$.

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lambda_n=\frac{1}{n^q}.}}$

Nous venons de voir que : $\forall k\in[\![0,q]\!]$, $a_k=a_k n^k\lambda_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall k\in[\![0,q]\!]$, $0=a_k(1-n^k\lambda_n)=a_k\left(1-\frac{n^k}{n^q}\right)=a_k\left(1-\frac{1}{n^{q-k}}\right)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. En particulier $\forall k\in[\![0,q]\!]$, $a_k\left(1-\frac{1}{2^{q-k}}\right)=0$.

Or $\forall k\in[\![0,q-1]\!]$, $1-\frac{1}{2^{q-k}}\neq 0$. Ainsi $\forall k\in[\![0,q-1]\!]$, $a_k=0$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $S(f)(x)=a_q x^q$.

$\underline{\underline{\exists a\in\mathbb{R}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ S(f)(x)=a x^q.}}$

c) Soit p dans $\mathbb{N}^*$. B_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (B_p est un polynôme) et B_p est un élément de E.

D'après III Q 1 b) $S(B_p)$ est une fonction polynomiale de degré $p-1$ et le coefficient du terme de plus haut degré est p car B_p est un polynôme unitaire de degré p.
Ainsi $S(B_p)$ n'est pas nulle. Nous pouvons alors appliquer ce qui précède et dire que : $\exists \hat{a} \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ S(B_p)(x) = \hat{a}\, x^{p-1}$.
Mieux $\forall x \in \mathbb{R},\ S(B_p)(x) = p\, x^{p-1}$ car le terme de plus haut degré du polynôme $S(B_p)$ est $p\, X^{p-1}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ S(B_p)(x) = p x^{p-1}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = a x^q = \dfrac{a}{q+1}(q+1)\, x^{(q+1)-1} = \dfrac{a}{q+1} S(B_{q+1})(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ S\left(f - \dfrac{a}{q+1} B_{q+1}\right)(x) = 0$; $S\left(f - \dfrac{a}{q+1} B_{q+1}\right)$ est nulle.

Posons $p = q+1$ et $\lambda = \dfrac{a}{q+1}$. $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $S(f - \lambda B_p)$ est nulle.

Ainsi il existe un réel non nul λ et un entier p non nul tels que $S(f - \lambda B_p)$ soit nulle.

- $f - \lambda B_p$ est 1-périodique car $f - \lambda B_p \in \operatorname{Ker} S$.
- $f - \lambda B_p$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car f et B_p sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f - \lambda B_p)\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) = \delta_n f(nx) - \lambda \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx).$$

$p = q+1$ donc $p-1 = q$. Alors $\dfrac{1}{n^{p-1}} = \dfrac{1}{n^q} = \delta_n$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (f - \lambda B_p)\left(x + \frac{k}{n}\right) = \delta_n \left(f(nx) - \lambda B_p(nx)\right) = \delta_n (f - \lambda B_p)(nx)$

Alors $f - \lambda B_p \in E$ et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^q}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée.

PARTIE IV Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1-périodique de E

(Q1) a) g est 1-périodique donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, g(x+n) = g(x)$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $g(k) = g(0)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, $g(k) = g(0) = g(kn)$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} g(kn) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(k) = g(kn)$; par conséquent $g(k) = 0$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{Z}, g(k) = 0.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2} + n) = g((2n+1) \times \frac{1}{2})$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n \times \frac{1}{2}) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} g((2n+1) \times \frac{1}{2}) = 0$ et ainsi $\underline{\underline{g(\frac{1}{2}) = 0.}}$

Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $g(\frac{p}{q}) = g(\frac{p}{q} + n) = g((nq+p) \times \frac{1}{q})$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n \times \frac{1}{q}) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} g((nq+p) \times \frac{1}{q}) = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (nq+p) \overset{q \in \mathbb{N}^*}{=} +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $g(\frac{p}{q}) = g((nq+p) \times \frac{1}{q})$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g((nq+p) \times \frac{1}{q}) = 0$ donc $g(\frac{p}{q}) = 0$.

$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, g(\frac{p}{q}) = 0.}}$ Ainsi $\underline{\underline{\forall z \in \mathbb{Q}, g(z) = 0.}}$

c) Soit x un réel. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{E(2^n x)}{2^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \mathbb{Q}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(z_n) = 0$.

Montrons que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $E(2^n x) \leq 2^n x < E(2^n x) + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \leq x < z_n + \frac{1}{2^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - z_n < \frac{1}{2^n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ il vient par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = x$.

$\lim_{n\to+\infty} z_n = x$ et g est continue en x donc $\lim_{n\to+\infty} g(z_n) = g(x)$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $g(z_n)=0$. Ainsi $g(x)=0$.

Finalement <u>g est la fonction nulle.</u>

<u>Remarque</u>.. Dans cette dernière phase nous avons utilisé la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ c'est à dire le fait que tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Q2 <u>a)</u> Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+1)-f(x)=0$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$.
Ainsi $x\mapsto F(x+1)-F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ donc la fonction nulle.
Ainsi $x\mapsto F(x+1)-F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$. Alors <u>$x\mapsto \int_x^{x+1} f(t)$ est constante sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> Soit x un réel.
f est continue sur $[x,x+1]$ donc $\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\Delta_n f(nx)\right)$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\Delta_n}{n} f(nx)\right) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$.

d'après a).

<u>$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\Delta_n}{n} f(nx)\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.</u>

Q3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\Delta_n|}{n} = +\infty$; $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\frac{|\Delta_n|}{n}\neq 0$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.
$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $|f(nx)| = \frac{n}{|\Delta_n|}\times\left|\frac{\Delta_n}{n} f(nx)\right|$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{|\Delta_n|}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\Delta_n}{n} f(nx)\right| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|$; ainsi $\lim_{n\to+\infty}|f(nx)|=0$.

<u>Par conséquent $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx)=0$.</u>

f est donc continue sur $\mathbb{R}$ (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$), 1-périodique et pour tout réel x $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx)=0$. D'après Q1, **$f$ est la fonction nulle.**

(Q4) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x+\frac{i}{n}\right) = a_n f(nx)$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ une récurrence simple montre que :

$$\forall r\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n-1} f^{(r)}\left(x+\frac{i}{n}\right) = a_n n^r f^{(r)}(nx)$$

Ainsi pour tout r dans $\mathbb{N}$, $f^{(r)}$ appartient à E et $(n^r a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée ... ce qui n'est pas fondamentalement un scoop.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^k|a_n|)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|n^{k+1}a_n|}{n} = +\infty$.

$f^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f^{(k+1)}$ appartient à E, $(n^{k+1}a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à $f^{(k+1)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|n^{k+1}a_n|}{n}=+\infty$ et enfin $f^{(k+1)}$ est 1-périodique

($\forall x\in\mathbb{R}, f(x+1)=f(x)$ donne $\forall r\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, f^{(r)}(x+1)=f^{(r)}(x)$).

Q3 permet de dire que $f^{(k+1)}$ est la fonction nulle.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f à l'ordre k donne :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-0)^i}{i!} f^{(i)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \overset{f^{(k+1)}\text{ est nulle}}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$. **$f$ est une fonction polynôme.**

b) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x+n)=f(x)$. $\forall n\in\mathbb{N}, f(n)-f(0)=0$.

Ainsi $x\mapsto f(x)-f(0)$ est une fonction polynôme ayant une infinité de racines.

$x \mapsto f(x) - f(0)$ est donc la fonction nulle. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(0) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$. f est constante.

Q5 • Nous avons déjà vu que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $p \in \mathbb{N}^*$, λB_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, appartient à E et n'est pas 1 périodique ($S(\lambda B_p) = \lambda S(B_p) \neq 0$ car $\lambda S(B_p)$ est un polynôme de degré $p-1$)

• Réciproquement soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ appartenant à E et qui n'est pas 1-périodique. D'après III Q4 d) il existe un réel λ non nul et un élément p de $\mathbb{N}^*$ tels que la fonction $h = f - \lambda B_p$ soit un élément de E, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 1-périodique.

Rappelons également que $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à h.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(n^p \left|\frac{1}{n^{p-1}}\right|\right) = +\infty$ donc d'après IV Q4 h est constante.

Si h n'est pas nulle la subdivision adaptée à h est $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'après I Q3 et ne peut donc pas être $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ainsi h est nulle.

Alors $f = \lambda B_p$.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ appartenant à E qui ne sont pas 1-périodiques est : $\{\lambda B_p \,;\, (\lambda, p) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*\}$.