préliminaire

(Q1) Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
Si f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$, alors $\exists c\in]a,b[,\ f'(c)=0$.

(Q2) Commençons par prouver un lemme.

Lemme .. Soit h une fonction numérique dérivable sur $[-1,1]$ s'annulant en au moins $k+1$ points distincts de $[-1,1]$ $(k\in\mathbb{N}^*)$
Alors h' s'annule en au moins k points distincts de $]-1,1[$.

Dm. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ $k+1$ zéros de h tels que : $-1\leq x_1<x_2<\dots<x_{k+1}\leq 1$.
Soit $i\in[\![1,k]\!]$. h est, largement, continue sur $[x_i,x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i,x_{i+1}[$ et $h(x_i)=h(x_{i+1})$ $(=0)$. Le théorème de Rolle prouve alors l'existence d'un élément y_i de $]x_i,x_{i+1}[$ tel que $h'(y_i)=0$.
Notons que $-1<y_1<y_2<\dots<y_k<1$. Ainsi h' s'annule en au moins k points distincts de $]-1,1[$.

a) g est dérivable sur $[-1,1]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[-1,1]$. Le lemme montre alors que : <u>g' s'annule en au moins n points distincts de $]-1,1[$.</u>

b) Montrons par récurrence que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $g^{(i)}$ s'annule en au moins $n+1-i$ points distincts de $]-1,1[$ (... ou en au moins un point de $]-1,1[$ dans le cas où $i=n$!)

- La propriété est vraie pour $i=1$ d'après a)
- Supposons la propriété vraie pour un élément i de $[\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Supposons donc que $g^{(i)}$ s'annule en au moins $n+1-i$ points distincts de $]-1,1[$ (... donc de $[-1,1]$). $g^{(i)}$ est dérivable sur $[-1,1]$ car $i<n$.
Ainsi, d'après le lemme $(g^{(i)})'$ s'annule en au moins $n-i$ points distincts de $]-1,1[$

Alors $g^{(i+1)}$ s'annule en au moins $n+1-(i+1)$ points distincts de $]-1,1[$ et ainsi s'achève la récurrence.

En particulier la propriété est vraie pour n. $n+1-n=1$ donc $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $]-1,1[$.

$\exists c \in]-1,1[,\ g^{(n)}(c)=0.$

Partie I

Q1 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X-a_k)$, ainsi $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont racines de L_i. $\forall j \in [\![1,n]\!]-\{i\},\ L_i(a_j)=0$. $L_i(a_i)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(a_i-a_k) \neq 0$ car $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont réels deux à deux distincts.

Ainsi $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ j\neq i \Rightarrow L_i(a_j)=0.\ \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ L_i(a_i)\neq 0.}$

b) Existence. Posons $P_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$!

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X-a_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc P_f appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P_f(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i(a_j) \underset{a)\ \to\ L_i(a_j)=0\ si\ j\neq i}{=} \frac{f(a_j)}{L_j(a_j)} L_j(a_j) = f(a_j).$

Ainsi $P_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que pour tout entier j de $[\![1,n]\!]$, $P_f(a_j)=f(a_j)$.

Unicité. Soit $\hat{P}_f$ un second élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \hat{P}_f(a_j)=f(a_j)$.

Alors $P_f-\hat{P}_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall j \in [\![1,n]\!],\ (P_f-\hat{P}_f)(a_j)=f(a_j)-f(a_j)=0.$

$P_f - \hat{P}_f$ est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins n zéros distincts ; c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\hat{P}_f = P_f$.

Il existe un unique polynôme P_f de degré au plus $n-1$ qui coïncide avec f en $a_1, a_2, \dots, a_n$. $\quad P_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$.

(Q2) $\int_{-1}^{1} P_f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \frac{1}{L_i(a_i)} \int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} P_f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\, \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i).$$

(Q3) Supposons que f soit une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui coïncide avec f (!) en $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ainsi $f = P_f$.
Alors $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_f(x)\,dx = J_n(f)$.

Si f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$: $I(f) = J_n(f)$.

(Q4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$g_\lambda(x) = f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0 \iff \lambda A_n(x) = f(x) - P_f(x) \iff \lambda = \frac{f(x) - P_f(x)}{A_n(x)}$.

$A_n(x) \neq 0$ car $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$

Il existe un réel λ et un seul tel que : $f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0$. $\quad \lambda = \frac{f(x) - P_f(x)}{A_n(x)}$.

b) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g_\lambda(a_i) = f(a_i) - P_f(a_i) - \lambda A_n(a_i) = f(a_i) - f(a_i) - \lambda \times 0 = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g_\lambda(a_i) = 0$.

c) P_f et A_n sont des polynômes donc P_f et A_n sont de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.
f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.
Ainsi g_λ est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$; en particulier **g_λ est de classe C^n sur $[-1, 1]$.**

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g_\lambda(a_i)=0$ et $g_\lambda(x)=0$. Or les $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n éléments de $[-1,1]$ deux à deux distincts et $x \in [-1,1]-\{a_1,\dots,a_n\}$.

Alors $a_1, a_2, \dots, a_n, x$ sont $n+1$ éléments de $[-1,1]$ deux à deux distincts qui annulent g_λ.

g_λ s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[-1,1]$.

Le préliminaire permet alors de dire que : $\exists c \in]-1,1[,\ g_\lambda^{(n)}(c)=0$.

$g_\lambda^{(n)} = f^{(n)} - P_f^{(n)} - \lambda A_n^{(n)}$. $\quad P_f^{(n)}=0$ car $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

A_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de X^n est 1, ainsi $A_n^{(n)} = n!$

Alors $g_\lambda^{(n)} = f^{(n)} - \lambda \times n!$ $\qquad 0 = g_\lambda^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - \lambda \times n!$

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

(Q5) Reprenons x dans $[-1,1]-\{a_1,\dots,a_n\}$. Posons $\lambda = \dfrac{f(x)-P_f(x)}{A_n(x)}$.

D'après ce qui précède : $\exists c \in]-1,1[,\ \lambda = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Alors $|f(x)-P_f(x)| = \left|\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} A_n(x)\right| = \dfrac{1}{n!}|f^{(n)}(c)|\,|A_n(x)| \leq \dfrac{M_n(f)}{n!}|A_n(x)|$.

$$|f(x)-P_f(x)| \leq \frac{M_n(f)}{n!}|A_n(x)|.$$

Observons que cette égalité vaut encore lorsque x est élément de $\{a_1,\dots,a_n\}$ car dans ce cas $f(x)-P_f(x) = A_n(x) = 0$.

Finalement : $\forall x \in [-1,1],\ |f(x)-P_f(x)| \leq \dfrac{M_n(f)}{n!}|A_n(x)|$.

$|I(f)-J_n(f)| = \left|\int_{-1}^{1}(f(x)-P_f(x))\,dx\right| \leq \int_{-1}^{1}|f(x)-P_f(x)|\,dx \leq \frac{M_n(f)}{n!}\int_{-1}^{1}|A_n(x)|\,dx$.

$|I(f)-J_n(f)| \leq \frac{M_n(f)}{n!}\int_{-1}^{1}|A_n(x)|\,dx$.

Q6 a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et soit $x \in [a_k, a_{k+1}]$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Si $i \leq k$ $\quad |x-a_i| = x-a_i \leq a_{k+1}-a_i = \frac{2}{n-1}(k-i+1)$

Si $i > k$ $\quad |x-a_i| = a_i - x \leq a_i - a_k = \frac{2}{n-1}(i-k)$

$|A_n(x)| = \prod_{i=1}^{n}|x-a_i| = \left(\prod_{i=1}^{k}|x-a_i|\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}|x-a_i|\right) \leq \prod_{i=1}^{k}\frac{2(k-i+1)}{n-1} \times \prod_{i=k+1}^{n}\frac{2(i-k)}{n-1}$.

$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{k}(k\times(k-1)\times\dots\times 1) \times \left(\frac{2}{n-1}\right)^{n-k}(1\times 2\times\dots\times(n-k))$.

$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{n} \times k! \times (n-k)!$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in [a_k, a_{k+1}],\ |A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{n} k!\,(n-k)!$

---

b) Pour obtenir le résultat demandé il suffit de prouver que :
$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\quad k!\,(n-k)! \leq (n-1)!$ ou que

$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\quad n \leq \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$.

Montrons ce résultat à l'aide d'une récurrence finie sur k.
→ C'est clair pour $k=1$ car $C_n^1 = n$.
→ Supposons la propriété vraie jusqu'à k pour k dans $[\![1, n-2]\!]$ et montrons la pour $k+1$.
Observons que $*\ C_n^{k+1} = C_n^{n-k-1}$ et $*\ n-k-1 \leq k \Leftrightarrow k \geq \frac{n-1}{2}$.
Distinguons alors deux cas.
1er cas : $k \geq \frac{n-1}{2}$. Alors $n-k-1 \in [\![1, k]\!]$ et l'hypothèse de récurrence

$n-k-1 \geq 1$ car $k \leq n-2$

donc $C_n^{n-k-1} \geqslant n$ donc $C_n^{k+1} \geqslant n$.

2ème cas : $k < \frac{n-1}{2}$; $2k < n-1$; $2k \leqslant n-2$, $n \geqslant 2k+2$

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} \geqslant \frac{2k+2-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \geqslant 1 .$$

Alors $C_n^{k+1} \geqslant C_n^k \geqslant n$. Ceci achève la récurrence. $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $n \leqslant C_n^k$ ou $k!(n-k)! \leqslant (n-1)!$

Soit $x \in [-1,1]$. $\exists k \in [\![1, n-1]\!]$, $x \in [a_k, a_{k+1}]$.

$$|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!(n-k)! \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$$

Finalement $\forall x \in [-1,1]$, $|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$

c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$$\frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2/e)^n} = \frac{e}{n-1} \times \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}} = \frac{e}{n-1} \times \sqrt{2\pi(n-1)} \times \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}} .$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n-1}}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}} = 1$ car $(n-1)! \sim \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2/e)^n} = 0$. Alors :

$\exists n_0 \in [\![2, +\infty[\![$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2/e)^n} \leqslant 1$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)! \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\forall x \in [-1,1]$, $|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

PARTIE II

Q1 a) • T est une application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

• Soit $(P,\varphi) \in (\mathbb{R}_{2n-1}[X])^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$T(\lambda P+\varphi) = ((\lambda P+\varphi)(a_1),\dots,(\lambda P+\varphi)(a_n),(\lambda P+\varphi)'(a_1),\dots,(\lambda P+\varphi)'(a_n))$.

$T(\lambda P+\varphi) = (\lambda P(a_1)+\varphi(a_1),\dots,\lambda P(a_n)+\varphi(a_n),\lambda P'(a_1)+\varphi'(a_1),\dots,\lambda P'(a_n)+\varphi'(a_n))$.

$T(\lambda P+\varphi) = \lambda(P(a_1),\dots,P(a_n),P'(a_1),\dots,P'(a_n)) + (\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n),\varphi'(a_1),\dots,\varphi'(a_n))$

$T(\lambda P+\varphi) = \lambda T(P)+T(\varphi)$.

Ainsi <u>T est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.</u>

b) Soit $\varphi \in \operatorname{Ker} T$. $\varphi(a_1)=\varphi'(a_1)=0,\dots,\varphi(a_n)=\varphi'(a_n)=0$

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, a_i est une racine d'ordre au moins 2 de φ. Rappelons que $a_1,\dots,a_n$ sont n réels deux à deux distincts. Alors φ admet au moins $2n$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Comme φ est un polynôme de degré au plus $2n-1$, φ est nécessairement le polynôme nul.

Alors $\operatorname{Ker} T = \{0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}\}$. <u>$T$ est injective</u>.

T est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$.
Alors T est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

<u>T est bijective.</u>

c) Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(a_j)=f(a_j)$ et $\varphi'(a_j)=f'(a_j) \Leftrightarrow T(\varphi) = (f(a_1),\dots,f(a_n),f'(a_1),\dots,f'(a_n))$.

Or $(f(a_1),\dots,f(a_n),f'(a_1),\dots,f'(a_n))$ est un élément de $\mathbb{R}^{2n}$ et T est une bijection de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Ainsi $\exists!\ Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $T(Q_f) = (f(a_1),\dots,f(a_n),f'(a_1),\dots,f'(a_n))$.

Par conséquent <u>il existe un unique polynôme Q_f de degré inférieur ou égal à $2n-1$ tel que : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $Q_f(a_j)=f(a_j)$ et $Q_f'(a_j)=f'(a_j)$.</u>

Q2 Si f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$, $Q_f = f$ car $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f(a_j)=f(a_j)$ et $f'(a_j)=f'(a_j)$!!

<u>Si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$: $I(f)=K_n(f)$.</u>

(Q3) $A_n^2 = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^2$. Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $A_n(a_j) = A_n'(a_j) = 0$.

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_{A_n}(a_j) = \varphi'_{A_n}(a_j) = 0$; $\varphi_{A_n} \in \mathrm{Ker}\, T$, $\underline{\varphi_{A_n} = 0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}}$

Par conséquent : $|I(A_n) - K_n(A_n)| = |I(A_n)| = \left|\int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,dx\right| = \int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,dx$.

$A_n^2 = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^2$; alors $(A_n^2)^{(2n)} = (2n)!$

Ainsi $M_{2n}(A_n^2) = \sup_{x\in[-1,1]} |(A_n^2)^{(2n)}(x)| = (2n)!$

Finalement : $|I(A_n) - K_n(A_n)| = \int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,dx = \frac{(2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,dx = \frac{M_{2n}(A_n^2)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,dx$

<u>L'inégalité proposée est une égalité si f est la fonction polynômiale $x \mapsto A_n^2(x)$.</u>

En clair l'inégalité proposée est optimale.

<u>Exercice 1.-</u> Montrer un résultat analogue pour l'inégalité de I Q5.

<u>Exercice 2.-</u> Prouver l'inégalité admise. Prendre x dans $[-1,1]-\{a_1,\dots,a_n\}$, considérer $h_\lambda(t) = f(t) - \varphi_f(t) - \lambda A_n^2(t)$ et choisir λ pour que $h_\lambda(x) = 0$. Prouver alors que h'_λ s'annule au moins $2n$ fois sur $[-1,1]$.

(Q4) • φ est une application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$

• Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

→ $\varphi(\lambda P+Q, R) = \int_{-1}^{1} (\lambda P+Q)(t)R(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (\lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t))\,dt$

$\varphi(\lambda P+Q, R) = \lambda\int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,dt + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,dt = \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$

<u>$\varphi(\lambda P+Q, R) = \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$.</u>

→ $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt = \varphi(Q,P)$. <u>$\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$.</u>

→ $\forall t \in [-1,1]$, $P^2(t) \geq 0$; $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geq 0$; <u>$\varphi(P,P) \geq 0$.</u>

→ Supposons que $\varphi(P,P)=0$. $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt=0$. P^2 est continue et positive sur $[-1,1]$ et $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt=0$. Alors $\forall t\in[-1,1]$, $P^2(t)=0$.

$\forall t\in[-1,1]$, $P(t)=0$. $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et P admet une infinité de racines.

Alors P est le polynôme nul.

$\varphi(P,P)=0 \Rightarrow P=0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

ceci achève de prouver que <u>φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

Q5 <u>a)</u> $Q_f-P_f\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $(Q_f-P_f)(a_j)=0$.

Ainsi Q_f-P_f est divisible par $\prod_{j=1}^{n}(X-a_j)=A_n$.

$\exists V\in\mathbb{R}[X]$, $Q_f-P_f=A_nV$. Comme $\deg(Q_f-P_f)\leq 2n-1$ et $\deg A_n=n$,

$\deg V\leq n-1$.

<u>Il existe un polynôme V de degré au plus $n-1$ vérifiant $Q_f-P_f=A_nV$.</u>

Supposons A_n orthogonal aux éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $\varphi(A_n,V)=0$.

$K_n(f)-J_n(f)=\int_{-1}^{1}(Q_f(x)-P_f(x))\,dx=\int_{-1}^{1}A_n(x)V(x)\,dx=\varphi(A_n,V)=0$.

<u>Si $A_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$, $K_n(f)=J_n(f)$.</u>

<u>b)</u> Supposons que $A_n\notin\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$. $\exists\tilde{V}\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(A_n,\tilde{V})\neq 0$.

Considérons $f: x\mapsto A_n(x)\tilde{V}(x)$. f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

f est une fonction polynomiale de degré au plus $2n-1$; $Q_f=f$.

De plus $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$ donc $P_f=0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

$K_n(f)-J_n(f)=\int_{-1}^{1}Q_f(x)\,dx-\int_{-1}^{1}P_f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}Q_f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$K_n(f)-J_n(f)=\int_{-1}^{1}A_n(x)\tilde{V}(x)\,dx=\varphi(A_n,\tilde{V})\neq 0$; $K_n(f)\neq J_n(f)$

<u>Si $A_n\notin\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ il existe une fonction f telle que $K_n(f)\neq J_n(f)$.</u>

PARTIE III

Q1 $R_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^3 - R_3$ est orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$.

$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $R_3 = aX^2 + bX + c$.

$\forall k \in [\![0,2]\!]$, $\varphi(X^3 - R_3, X^k) = 0$; $\forall \ell \in [\![0,2]\!]$, $\varphi(X^3, X^\ell) = \varphi(R_3, X^\ell)$.

Alors $\forall \ell \in [\![0,2]\!]$, $a\,\varphi(X^2, X^\ell) + b\,\varphi(X, X^\ell) + c\,\varphi(1, X^\ell) = \varphi(X^3, X^\ell)$.

Notons que : $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2$, $\varphi(X^i, X^j) = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx = \left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$.

$$\forall \ell \in [\![0,2]\!],\quad a\,\frac{1-(-1)^{\ell+3}}{\ell+3} + b\,\frac{1-(-1)^{\ell+2}}{\ell+2} + c\,\frac{1-(-1)^{\ell+1}}{\ell+1} = \frac{1-(-1)^{\ell+4}}{\ell+4}$$

ce qui donne le système :
$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + 2c = 0 \\ \frac{2}{3}b = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases}$$

Alors $a = c = 0$ et $b = \frac{3}{5}$. $R_3 = \frac{3}{5}X$. $\underline{\underline{S_3 = X^3 - \frac{3}{5}X}}$.

Q2 a) $S_n = X^n - R_n$ et $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

<u>S_n est de degré n et le coefficient dominant de S_n est 1.</u>

b) $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc $\varphi(1, S_n) = 0$.

Ainsi $\underline{\underline{\int_{-1}^{1} S_n(x)\,dx = 0}}$.

Supposons que S_n n'ait pas de racine dans $]-1,1[$. Alors S_n garde un signe constant sur $]-1,1[$ (S_n est continue sur $]-1,1[$) et même sur $[-1,1]$ (toujours la continuité de S_n, cette fois sur $[-1,1]$).

S_n est continue sur $[-1,1]$, de signe constant sur $[-1,1]$ et $\int_{-1}^{1} S_n(x)\,dx = 0$.

Alors S_n est nul (tel) sur $[-1,1]$. Ceci contredit $\deg S_n = n$.

<u>S_n a au moins une racine dans $]-1,1[$.</u>

(Q3) a) $\varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (*). Alors $\phi(S_n, \varphi) = 0$.

(*) mieux $\varphi \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$... mais inutile.

Ainsi $\int_{-1}^{1} (x-\alpha)^2 (\varphi(x))^2 dx = 0$; $\phi((X-\alpha)\varphi, (X-\alpha)\varphi) = 0$; $(X-\alpha)\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Alors $\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et : $S_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$!

Il n'existe pas de réel α et de polynôme φ tel que : $S_n = (X-\alpha)^2 \varphi$.

Ainsi toutes les racines réelles de S_n sont simples.

b) Les racines de $S_n U$ dans $]-1,1[$ sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et elles sont d'ordre 2 ; ainsi $S_n U$ ne change pas de signe dans $]-1,1[$ donc dans $[-1,1]$ ($S_n U$ est continue sur $[-1,1]$). $S_n U$ garde un signe constant sur $[-1,1]$.

$S_n U$ est continue sur $[-1,1]$ et garde un signe constant sur $[-1,1]$.

Alors $\int_{-1}^{1} (S_n U)(x) dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [-1,1], (S_n U)(x) = 0 \overset{S_n U \in \mathbb{R}[X]}{\Rightarrow} S_n U = 0_{\mathbb{R}[X]}$!!

Donc $\int_{-1}^{1} (S_n U)(x) dx \neq 0$. De plus $p \leq n$ car $\deg S_n = n$ donc $U \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\phi(S_n, U) \neq 0$ donc $U \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par conséquent $\deg U > n-1$.

Soit : $\deg \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) > n-1$; $p > n-1$; $p \geq n$; $p = n$ car $p \leq n$.

Alors S_n admet au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$. Comme $\deg S_n = n$:

S_n admet exactement n racines (réelles) distinctes dans $]-1,1[$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

$\deg S_n = n$ et le coefficient de X^n dans S_n est 1 donc $S_n = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$.

III Q5

(Q4) $A_n = S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $K_n(f) \overset{\downarrow}{=} J_n(f)$. Ainsi $|I(f) - J_n(f)| = |I(f) - K_n(f)|$

II Q 3 donne alors : $|I(f) - J_n(f)| \leq \dfrac{M_n(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} S_n^2(x) dx$.

Q5 $n=3$. $S_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$. Les zéros de S_3 sont $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Alors $J_3(f) = S_1 f(\alpha_1) + S_2 f(\alpha_2) + S_3 f(\alpha_3) = S_1 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + S_2 f(0) + S_3 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

Calculons alors S_1, S_2, S_3. $a_1 = \alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $a_2 = \alpha_2 = 0$ et $a_3 = \alpha_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.

- $S_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{L_1(a_1)} L_1(x)\,dx$ avec $L_1 = (x-0)\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,x$.

$L_1(a_1) = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{6}{5}$. et $\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)dx \underset{x \mapsto x \text{ est impaire}}{=} \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$.

Alors $S_1 = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

- $S_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{L_2(a_2)} L_2(x)\,dx$ avec $L_2 = \left(x+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = x^2 - \frac{3}{5}$.

$L_2(a_2) = L_2(0) = -\frac{3}{5}$. $\int_{-1}^{1} L_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - \frac{3}{5}\int_{-1}^{1} 1\,dx = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times 2$

$S_2 = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\right) = -\frac{10}{9} + \frac{6}{3} = \frac{8}{9}$.

- $S_3 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{L_3(a_3)} L_3(x)\,dx$ avec $L_3 = x\left(x+\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,x$.

Notons que $L_3(x) = L_1(-x)$. $\frac{1}{L_3(a_3)} L_3(x) = \frac{1}{L_1(-a_3)} L_1(-x) = \frac{1}{L_1(a_1)} L_1(-x)$.

$S_3 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{L_1(a_1)} L_1(-x)\,dx \underset{u=-x}{=} \int_{1}^{-1} \frac{1}{L_1(a_1)} L_1(u)(-du) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{L_1(a_1)} L_1(u)\,du = S_1$.

Alors $S_3 = \frac{5}{9}$.

Finalement : $J_3(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

$$J_3(f) = \frac{1}{9}\left(5 f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + 8 f(0) + 5 f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right).$$

Q6 a) Posons $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = 1$. f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

$f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $J_n(f) = I(f) = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$.

Ainsi $2 = J_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$. $\quad \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2.}}$

b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Posons $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = L_j^2(t)$. f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.
$L_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$; $L_j^2 \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$; $L_j^2 \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Alors $I(f) = K_n(f) = J_n(f)$. $J_n(f) = \int_{-1}^{1} L_j^2(x)\,dx > 0$ $\quad (L_j^2 \neq 0\ !)$

Alors $0 < J_n(f) = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_\ell f(a_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_\ell L_j^2(a_\ell) = \delta_j L_j^2(a_j)$.

Or $L_j(a_j) \neq 0$ donc $L_j^2(a_j) > 0$ comme $\delta_j L_j^2(a_j) > 0$ il vient $\delta_j > 0$

Finalement : $\underline{\underline{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \delta_j > 0.}}$

c) Posons $U_n = (-1)^n S_n(-X)$. Montrons que $U_n = S_n$.

Il suffit de prouver que $X^n - U_n$ est la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

• $\deg S_n = n$ et le coefficient de X^n dans S_n est 1.

Alors $\deg S_n(-X) = n$ et le coefficient de X^n dans $S_n(-X)$ est $(-1)^n$.

Ainsi $\deg U_n = n$ et le coefficient de X^n dans U_n est $(-1)^n(-1)^n = 1$.

Alors $\underline{X^n - U_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

• Montrons que $X^n - (X^n - U_n)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: ce qui revient à prouver que $U_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\phi(U_n, R) = \int_{-1}^{1} U_n(x) R(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-1)^n S_n(-x) R(x)\,dx$.

$\phi(U_n, R) \underset{u=-x}{=} \int_{1}^{-1} (-1)^n S_n(u) R(-u)\,du = \int_{-1}^{1} (-1)^n S_n(u) R(-u)\,du = (-1)^n \phi(S_n, R(-X))$.

Or $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ et $R(-X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\varphi(S_n, R(-X)) = 0$.

Alors $\underline{\varphi(U_n, R) = 0 \text{ et ceci pour tout élément } R \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Ceci achève de prouver que : $X^n - U_n$ est la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $X^n - U_n = R_n$. $\quad U_n = X^n - R_n = S_n$. $\quad S_n = U_n = (-1)^n S_n(-X)$

Finalement $\quad \underline{\underline{S_n(-X) = (-1)^n S_n = (-1)^n S_n(X)}}$.

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = -\alpha_i$.

Alors $\beta_n < \beta_{n-1} < \dots < \beta_1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $S_n(\beta_i) = S_n(-\alpha_i) = (-1)^n S_n(\alpha_i) = 0$.

Donc $(\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = \alpha_{n+1-i}$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_{n+1-i} = -\alpha_i}}$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\int_{-1}^{1} L_{n+1-j}(t)\,dt = \int_{-1}^{1} L_{n+1-j}(-u)\,du \qquad S_{n+1-j} = \frac{1}{L_{n+1-j}(\alpha_{n+1-j})} \int_{-1}^{1} L_{n+1-j}(-u)\,du$$

$$L_{n+1-j}(-X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n+1-j}}^{n} ((-X) - \alpha_k) = (-1)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n+1-j}}^{n} (X + \alpha_k)$$

$$L_{n+1-j}(-X) \underset{i = n+1-k}{=} (-1)^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (X + \alpha_{n+1-i}) = (-1)^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (X - \alpha_i) = (-1)^n L_j(X).$$

Alors $$S_{n+1-j} = \frac{1}{L_{n+1-j}(\alpha_{n+1-j})} \int_{-1}^{1} (-1)^n L_j(u)\,du = \frac{1}{L_{n+1-j}(-\alpha_j)} \int_{-1}^{1} (-1)^n L_j(u)\,du$$

$$S_{n+1-j} = \frac{1}{(-1)^n L_j(\alpha_j)} \int_{-1}^{1} (-1)^n L_j(u)\,du = \frac{1}{L_j(\alpha_j)} \int_{-1}^{1} L_j(u)\,du = S_j.$$

$\underline{\underline{\forall j \in [\![1, n]\!],\ S_{n+1-j} = S_j}}$.

Remarque.. Il est aisé de confirmer ces résultats pour $n = 3$.

Q7 a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg P = n$ et tel que le coefficient dominant de P soit 1.

$\exists\, \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P = X^n + \varphi$. $P = X^n - \hat{\varphi}$ avec $\hat{\varphi} = -\varphi$. Notons que $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Rappelons que R_n est la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $\|X^n - R_n\| \leq \|X^n - \hat{\varphi}\|$ ($\|\cdot\|$ est la norme associée à Φ).

Ainsi $\|S_n\| \leq \|P\|$; $\|S_n\|^2 \leq \|P\|^2$. $\Phi(S_n, S_n) \leq \Phi(P, P)$.

ce qui donne $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx$.

Pour tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant 1 : $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx$.

---

b) Montrons ce résultat à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2".

- Pour $T_1 = X$ et $T_2 = X^2 - 1/2$.
  T_1 (resp. T_2) est de degré 1 (resp. 2) et de coefficient dominant 1.
  De plus $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = 2^{1-1} T_1(\cos\theta)$ et $\cos(2\theta) = 2(\cos^2\theta - \frac{1}{2}) = 2^{2-1} T_2(\cos\theta)$.
  La propriété est ainsi vraie pour $k = 1$ et 2.

- Supposons la propriété vraie pour k et $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $k+2$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $2\cos\theta \cos(k+1)\theta = \cos(\theta + (k+1)\theta) + \cos(\theta - (k+1)\theta)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+2)\theta) = 2\cos\theta \cos((k+1)\theta) - \cos(-k\theta) = 2\cos\theta\cos((k+1)\theta) - \cos k\theta$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+2)\theta) = 2\cos\theta\, 2^{k} T_{k+1}(\cos\theta) - 2^{k-1} T_k(\cos\theta)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+2)\theta) = 2^{k+1}\left[\cos\theta\, T_{k+1}(\cos\theta) - \frac{1}{4} T_k(\cos\theta)\right]$

Posons $T_{k+2} = X T_{k+1} - \frac{1}{4} T_k$. $\deg T_{k+1} = k+1$ et $\deg T_k = k$ donc

$\deg T_{k+2} = k+2$. Le coefficient dominant de T_{k+2} est celui de $X T_{k+1}$

qui est 1 car le coefficient dominant de T_{k+1} est 1.

De plus $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+2)\theta) = 2^{k+1}\left[\cos\theta\, T_{k+1}(\cos\theta) - \frac{1}{4} T_k(\cos\theta)\right] = 2^{k+1} T_{k+2}(\cos\theta)$.

Ainsi la propriété est vraie pour $k+2$ et la récurrence s'achève.

<u>Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos\theta)$.</u>

<u>Exercice</u> .. Retrouver ce résultat en partant de $\cos k\theta = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^k$. Montrer l'unicité de T_k.

T_n est de degré n et de coefficient dominant 1 donc $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,dx \underset{x=\cos\theta}{=} \int_{\pi}^{0} T_n^2(\cos\theta)(-\sin\theta)\,d\theta \underset{T_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\theta)}{=} \frac{1}{2^{2n-2}}\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\sin\theta\,d\theta \underset{\cos^2(n\theta)\sin\theta \leq 1}{\leq} \frac{1}{2^{2n-1}}\int_0^{\pi} 1\,d\theta$$

Alors $\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2^{2n-1}}$. Alors $\underline{\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2^{2n-2}}}$.

<u>Remarque</u> .. $\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n-2}}\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{2n-2}} \times \frac{4n^2-2}{4n^2-1}$

On a donc $\underline{\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,dx \leq \frac{1}{2^{2n-2}}\,\frac{4n^2-2}{4n^2-1} \leq \frac{1}{2^{2n-2}}}$.