Partie I Préliminaires

(Q1) Soit $x \in \operatorname{Ker} P(f)$. $P(f)(x) = 0_E$.

Alors $f(P(f)(x)) = 0_E$; $(f \circ P(f))(x) = 0_E$; $((XP)(f))(x) \overset{(*)}{=} 0_E$. Or $XP = PX$ donc :
$((PX)(f))(x) = 0_E$; $(P(f) \circ f)(x) \overset{(*)}{=} 0_E$; $P(f)(f(x)) = 0_E$; $f(x) \in \operatorname{Ker} P(f)$.

(*) Rappelons que $\forall (S,T) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(ST)(f) = S(f) \circ T(f)$.

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} P(f) \text{ est stable par } f.}$

(Q2) a) • Soit D une droite de E stable par f. $\exists u \in E$, $u \neq 0_E$ et $D = \operatorname{Vect}(u)$.
$u \in D$ donc $f(u) \in D = \operatorname{Vect}(u)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$.
Alors $u \neq 0_E$ et $f(u) = \lambda u$, u est un vecteur propre de f.
Ainsi D est engendrée par un vecteur propre de f.
• Réciproquement soit D une droite de E engendrée par un vecteur propre u de f.

$D = \operatorname{Vect}(u)$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$.

$f(D) = f(\operatorname{Vect}(u)) = \operatorname{Vect}(f(u)) = \operatorname{Vect}(\lambda u) \subset \operatorname{Vect}(u) = D$
(avec égalité si λ n'est pas nul.)

D est stable par f.

<u>Les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de f.</u>

b) B est triangulaire supérieure donc le spectre de B est constitué par les éléments diagonaux de B.
$\operatorname{Sp}(g) = \operatorname{Sp}(B) = \{1, 2\}$.
Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de E.

$$g(u) = u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0. \quad SEP(g,1) = \operatorname{Vect}(e_1).$$

$$g(u) = 2u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad SEP(g,2) = \operatorname{Vect}(e_3).$$

D'après a) <u>les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g sont $\operatorname{Vect}(e_1)$ et $\operatorname{Vect}(e_3)$.</u>

Q3 a) Soit u un élément de $\sum_{k=1}^{p} F_k$. $\exists (u_1, u_2, \dots, u_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k$, $u = \sum_{k=1}^{p} u_k$.

$f(u) = \sum_{k=1}^{p} f(u_k)$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(u_k) \in F_k$ (F_k est stable par f ...).

Ainsi $f(u) = \sum_{k=1}^{p} f(u_k) \in \sum_{k=1}^{p} F_k$. $\underline{\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est stable par } f.}$

b) Pour $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $P_\ell = (X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$ et $F_\ell = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \mathrm{Id}_E)^{n_\ell}$.

$P_\ell \in \mathbb{R}[X]$ donc $F_\ell = \mathrm{Ker}\,(P_\ell(f))$ est stable par f, ceci pour tout $\ell \in [\![1,p]\!]$ (Q1!)

D'après a), $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est stable par f. Ainsi $\underline{\sum_{\ell=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \mathrm{Id}_E)^{n_\ell} \text{ est stable par } f.}$

__Remarque__.. le fait que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres n'intervient en rien ici.

Q4 a) Soit F un s.e.v. de E stable par f.
$\forall x \in F$, $f(x) \in F$.
$\forall x \in F$, $f(x) \in F$ et $-\lambda x \in F$
$\forall x \in F$, $f(x) - \lambda x \in F$
$\forall x \in F$, $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) \in F$;
F est stable par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$

Soit F un s.e.v. de E stable par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$
$\forall x \in F$, $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) \in F$
$\forall x \in F$, $f(x) - \lambda x \in F$ et $\lambda x \in F$
$\forall x \in F$, $f(x) - \lambda x + \lambda x \in F$
$\forall x \in F$, $f(x) \in F$
F est stable par f.

__Ainsi, pour tout réel λ, les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$.__

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

$\forall x \in F$, $f(x) \in F$. Par conséquent $\forall x \in F$, $f(f(x)) \in F$, F est stable par f^2.

__Les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f sont stables par f^2.__

__Remarque__.. La réciproque est fausse. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit f l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
$A^2 = I_2$. $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Tout sous-espace de E est stable par f^2.
Ainsi $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par f^2 mais pas par f ($f(D) = \mathrm{Vect}(f(e_1)) = \mathrm{Vect}(e_2) \not\subset D$).

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un automorphisme f de E.
$f(F) \subset F$. Montrons en fait que $f(F) = F$.
Comme F est de dimension finie il suffit de prouver que $\dim f(F) = \dim F$ car $f(F) \subset F$.
Si $F = \{0_E\}$, $f(F) = \{0_E\}$ et tout est clair.
Supposons $F \neq \{0_E\}$ et soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de F. $\dim F = p$.
$f(F) = f(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$; ainsi $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(\omega_p))$ est une famille génératrice de $f(F)$. Montrons que cette famille est libre.
Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i) = 0_E$; $f(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i) = 0_E$.
Donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \in \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0_E$. La liberté de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ donne $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.
Ainsi la famille $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ est une famille libre et génératrice de $f(F)$.
Alors $\dim f(F) = p = \dim F$, comme $f(F) \subset F$: $f(F) = F$.

$F \underset{f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E}{=} (f^{-1} \circ f)(F) = f^{-1}(f(F)) \underset{f(F)=F}{=} f^{-1}(F)$; $f^{-1}(F) = F$ et ainsi est stable par f.

Réciproquement si F est stable par f^{-1}, ce qui précède montre que F est stable par $(f^{-1})^{-1} = f$ car f^{-1} est un automorphisme de E.

Finalement, <u>si f est un automorphisme de E, f et f^{-1} ont les mêmes sous-espaces stables.</u>

d) Soit f un endomorphisme laissant stable tout sous-espace vectoriel de E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_i)$ est une droite vectorielle de E stable par f.

Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $\mathrm{Vect}(e_i + e_j)$ est une droite vectorielle stable par f. Ainsi $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $f(e_i + e_j) = \lambda_{ij}(e_i + e_j)$.

Alors $\lambda_{ij} e_i + \lambda_{ij} e_j = f(e_i + e_j) = f(e_i) + f(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$.
Donc $(\lambda_{ij} - \lambda_i) e_i + (\bar{\lambda}_{ij} - \lambda_j) e_j = 0_E$. (e_i, e_j) étant une famille libre de E $(i \neq j)$ il vient : $\lambda_{ij} - \lambda_i = \lambda_{ij} - \lambda_j = 0$. Ainsi $\lambda_i = \lambda_j$.

Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$. Posons $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i = (\lambda Id_E)(e_i)$.

Les deux endomorphismes de E, f et λId_E, coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E donc ces deux endomorphismes sont égaux.

<u>Si f est un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E, f est une homothétie vectorielle de E, autrement dit il existe un réel λ tel que $f = \lambda Id_E$.</u>

<u>Remarque</u>.. Clairement, si λ est un réel, λId_E est un endomorphisme de E qui laisse stable tout sous-espace vectoriel de E.

Ainsi les endomorphismes de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E sont les homothéties vectorielles.

c) <u>Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique</u> $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E.

Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E stable par f et distinct de $\{0_E\}$ et de E. Dans ces conditions F est une droite vectorielle de E stable par f.

F est engendrée par un vecteur propre $u = xe_1 + ye_2$ de f associé à la valeur propre λ.

$f(u) = \lambda u$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\lambda x \\ 0 = x - \lambda y = (1+\lambda^2)x \end{cases}$

$\lambda^2 + 1 \neq 0$ donc $x = y = 0$; $u = 0_E$!

Ainsi <u>f ne laisse stable que les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E.</u>

Q5 <u>a)</u> • Soit H un hyperplan de E. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ une base de H.

Le théorème de la base incomplète indique qu'il existe un élément u_n de E tel que $\hat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ soit une base de H.

Soit φ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(u_i) = 0$ et $\varphi(u_n) = 1$.

φ est une forme linéaire non nulle sur E. Montrons que $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

Soit $u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ un élément de E.

$u \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(u_k) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x_n = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$

$u \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow u \in H$. $\operatorname{Ker}\varphi = H$.

φ est donc une forme linéaire non nulle sur E de noyau H.

Ainsi tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Réciproquement soit H le noyau d'une forme linéaire non nulle φ de E.

$\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ ou 1. φ n'étant pas nulle : $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$; $\operatorname{rg}\varphi = 1$.

Le théorème du rang donne : $\dim H = \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E - \operatorname{rg}\varphi = n-1$. H est un hyperplan de E.

<u>Les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.</u>

<u>b)</u> i) • Supposons H stable par f.

Soit $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de H et u_n un élément de E tel que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ soit une base de E.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(f(u_i)) = 0$ car $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(u_i) \in H$ (H est stable par f).

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(u_i) = 0$ et φ n'est pas la forme linéaire nulle donc $\varphi(u_n) \neq 0$

Alors $(\varphi \circ f)(u_n) = \dfrac{(\varphi \circ f)(u_n)}{\varphi(u_n)} \varphi(u_n)$.

Mais $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $(\varphi \circ f)(u_i) = 0 = \dfrac{(\varphi \circ f)(u_n)}{\varphi(u_n)} \times 0 = \dfrac{(\varphi \circ f)(u_n)}{\varphi(u_n)} \times \varphi(u_i)$.

Ainsi en posant $\lambda = \dfrac{(\varphi \circ f)(u_n)}{\varphi(u_n)}$: $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\varphi \circ f)(u_i) = \lambda \varphi(u_i)$

Les formes linéaires $\varphi \circ f$ et $\lambda \varphi$ coïncident sur la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E

donc $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

<u>Si H est stable par f : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.</u>

- Réciproquement supposons que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ f = \lambda \varphi$. Montrons que H est stable par f.

$\forall x \in H$, $\lambda \varphi(x) = 0$ car $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

Alors $\forall x \in H$, $\varphi(f(x)) = 0$; $\forall x \in H$, $f(x) \in \operatorname{Ker}\varphi = H$. H est stable par f.

Finalement <u>H est stable par f si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi \circ f = \lambda \varphi$.</u>

ii) H stable par $f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi \circ f = \lambda \varphi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ LA = \lambda L \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(LA) = {}^t(\lambda L)$

H stable par $f \Leftrightarrow {}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$.

<u>H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ tel que ${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$.</u>

c) Soit H un plan de E stable par g. H est un hyperplan de E car $\dim E = 3$.
Il existe une forme linéaire non nulle sur E φ telle que $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
Soit L la matrice de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.
Comme H est stable par φ : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tB\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$.
${}^tL \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ car φ n'est pas la forme linéaire nulle. Ainsi λ est valeur propre de ${}^tB$ et ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tB$ associé à la valeur propre λ

${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc les valeurs propres de ${}^tB$ sont 1 et 2 (${}^tB$ est triangulaire inférieure)

Posons $L = (a, b, c)$.
1er cas.. $\lambda = 1$. ${}^tB\,{}^tL = \lambda\,{}^tL \Leftrightarrow {}^tB\,{}^tL = {}^tL \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ a + b = b \\ 2c = c \end{cases} \Leftrightarrow a = c = 0$. $L = (0, b, 0)$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in H \Leftrightarrow \varphi(u) = 0 \Leftrightarrow L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow by = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($b \neq 0$ car $L \neq 0_{\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})}$)

$u \in \operatorname{Ker} H \Leftrightarrow y = 0$. $H = \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$.

2e cas.. $\lambda = 2$. ${}^tB\,{}^tL = \lambda\,{}^tL \Leftrightarrow {}^tB\,{}^tL = 2\,{}^tL \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a \\ a + b = 2b \\ 2c = 2c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$. $L = (0, 0, c)$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$u \in H \Leftrightarrow \varphi(u) = 0 \Leftrightarrow (0, 0, c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow cz = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ($c \neq 0$ car ${}^tL = (0,0,c) \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

$H = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Si H est un plan de E stable par g : $H = \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$ ou $H = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Réciproquement si $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$: $g(H) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_3)) = \mathrm{Vect}(e_1, 2e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3) = H$ et

H est stable par g.

Si $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $g(H) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2)) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1+e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = H$, H est stable par g.

Finalement, les plans de $E = \mathbb{R}^3$ stables par g sont : $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Partie II Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable

Q1 $p=1$. Ainsi $E = E_1 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$. $f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f = \lambda_1 \mathrm{Id}_E$.
Alors tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.
Si $p=1$ les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont les sous-espaces vectoriels de E.

Q2 a) f est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$. $x \in F \subset E$;

Ainsi : $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k$, $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$.

b) $x \in F$ donc $f(x) \in F$ et $-\lambda_1 x \in F$ (F est stable par f) et ainsi $f(x) - \lambda_1 x \in F$.

Or $f(x) - \lambda_1 x = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) - \lambda_1 \sum_{k=1}^{p} x_k = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 x_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 x_k$.

$f(x) - \lambda_1 x = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k = \sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k$.

Ainsi $\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$.

c) Posons $P_0 = 1$ et $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $P_i = \prod_{j=1}^{i} (X - \lambda_j)$.

Montrons par récurrence que : $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum_{k=i+1}^{p} P_i(\lambda_k) x_k \in F$

→ C'est vrai pour $i=0$ et $i=1$

→ Supposons la propriété vraie pour $i \in [\![0, p-2]\!]$ et montrons-la pour $i+1$.

$\sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell \in F$ donc $f\left(\sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell\right)$ et $-\lambda_{i+1} \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell$ sont deux éléments de F.

Alors $f\left(\sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell\right) - \lambda_{i+1} \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell \in F$.

$$f\left(\sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell\right) - \lambda_{i+1} \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell = \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) f(x_\ell) - \lambda_{i+1} P_i(\lambda_\ell) x_\ell$$

$$\text{" \quad "} = \sum_{\ell=i+1}^{p} (P_i(\lambda_\ell)\lambda_\ell - \lambda_{i+1} P_i(\lambda_\ell)) x_\ell$$

$$\text{" \quad "} = \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell)(\lambda_\ell - \lambda_{i+1}) x_\ell = \sum_{\ell=i+2}^{p} \underbrace{P_i(\lambda_\ell)(\lambda_\ell - \lambda_{i+1})}_{P_{i+1}(\lambda_\ell)} x_\ell$$

$$= \sum_{\ell=i+2}^{p} P_{i+1}(\lambda_\ell) x_\ell$$

Ainsi $\sum_{\ell=i+2}^{p} P_{i+1}(\lambda_\ell) x_\ell$ appartient à F et la récurrence s'achève.

$\forall i \in [\![0, p-1]\!], \ \sum_{\ell=i+1}^{p} P_i(\lambda_\ell) x_\ell \in F$.

Montrons alors, à l'aide d'une récurrence descendante, que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i, x_{i+1}, \dots, x_p$ sont des éléments de F.

→ $\sum_{\ell=(p-1)+1}^{p} P_{p-1}(\lambda_\ell) x_\ell \in F$ donc $P_{p-1}(\lambda_p) x_p \in F$. Or $P_{p-1}(\lambda_p)$ est un réel non nul donc $\frac{1}{P_{p-1}(\lambda_p)} P_{p-1}(\lambda_p) x_p = x_p$ appartient encore à F. D'où donc la propriété pour $p = 1$.

pour $i \in [\![2, p]\!]$

→ Supposons que $x_i, x_{i+1}, \dots, x_p$ sont des éléments de F. Montrons que $x_{i-1}, x_i, \dots, x_p$ sont des éléments de F. Il suffit donc de montrer que $x_{i-1} \in F$.

$i-2 \in [\![0, p-2]\!]$ donc $\displaystyle\sum_{k=i-2}^{p} P_{i-2}(\lambda_k)\, x_k \in F$.

$P_{i-2}(\lambda_{i-1})\, x_{i-1} = -\displaystyle\sum_{k=i}^{p} P_{i-2}(\lambda_k)\, x_k \in F$ car $x_i, x_{i+1}, \dots, x_p$ sont dans F d'après l'hypothèse de récurrence.

$P_{i-2}(\lambda_{i-1})\, x_{i-1} \in F$ et $P_{i-2}(\lambda_{i-1}) \neq 0$ donc $\dfrac{1}{P_{i-2}(\lambda_{i-1})} P_{i-2}(\lambda_{i-1})\, x_{i-1} = x_{i-1}$ est encore un élément de F ; ceci achève la récurrence.

La propriété est en particulier vraie pour $i = 1$ donc $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des éléments de F.

(Q3) • Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Posons $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $F_k = F \cap E_k$.

Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace vectoriel de E (comme intersection de deux sous-espaces vectoriels de E) contenu dans E_k.
Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k. Montrons que $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$.

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $F_k \subset F$ et F est un sous-espace vectoriel de E donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \subset F$.

Montrons que $F \subset \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$. Soit $x \in F$: $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} E_k$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k$.

Nous avons vu que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $x_k \in F$ (Q2 c)) ; ainsi $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $x_k \in F \cap E_k = F_k$.

Alors $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k \in \sum_{k=1}^{p} F_k$.

Finalement $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ avec F_k sous-espace vectoriel de E_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

• Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k. Montrons que F est stable par f. Soit $x \in F$. $\exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} F_k$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k$.

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f(x_k) = \lambda_k x_k \in F_k$. $f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in \sum_{k=1}^{p} F_k = F$

F est stable par f.

les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leq k \leq p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

(Q4) Soit f_F l'endomorphisme induit par f sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables F. Montrons que f_F est diagonalisable.

$F = \sum_{k=1}^{p} F_k$ où pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

Mieux $F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ car $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont en somme directe car $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont en somme directe (ok !).

Posons $I = \{k \in [\![1,p]\!],\ F_k \neq \{0_E\}\}$.

1er cas. $I = \emptyset$. Alors $F = \{0_E\}$. $f_F = 0_{\mathcal{L}(F)}$; f_F est diagonalisable !

2ème cas. $I \neq \emptyset$. Alors $F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k \in I} F_k$.

Pour tout k dans I, considérons une base $\mathcal{B}_k$ de F_k ($F_k \neq \{0_E\}$).

Comme $F = \bigoplus_{k \in I} F_k$, $\mathcal{B}_F = $ " $\bigcup_{k \in I} \mathcal{B}_k$ " est alors une base de F.

Pour tout k dans I, les éléments de $\mathcal{B}_k$ sont des éléments non nuls de F_k donc de E_k.

Pour tout k dans I, les éléments de $\mathcal{B}_k$ sont des vecteurs propres de f donc de f_F.

Ainsi $\mathcal{B}_F$ est une base de F constituée de vecteurs propres de f_F.

f_F est alors diagonalisable.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable.

(Q5) ■ Lemme.. Soit E' un espace vectoriel sur K.
E' possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels si et seulement si $\dim_K E' \leq 1$.

Si $\dim E' \leq 1$ les sous-espaces vectoriels de E' sont $\{0_{E'}\}$ et E' donc sont en nombre fini.
Supposons $\dim E' \geq 2$. Il existe deux éléments de E' v et w tels que la famille (v, w) soit libre.
Posons $\forall \lambda \in K$, $F_\lambda = \mathrm{Vect}(v + \lambda w)$. Soit $(\lambda, \lambda') \in K^2$, $\lambda \neq \lambda'$. Montrons que $F_\lambda \neq F_{\lambda'}$.
Supposons $F_\lambda = F_{\lambda'}$. Alors $v + \lambda' w \in \mathrm{Vect}(v + \lambda w)$. $\exists \alpha \in K$, $v + \lambda' w = \alpha(v + \lambda w)$.
$(1-\alpha) v + (\lambda' - \alpha\lambda) w = 0_{E'}$; $1 - \alpha = \lambda' - \alpha\lambda = 0$; $\alpha = 1$ et $\lambda' = \lambda$!!
$(F_\lambda)_{\lambda \in K}$ est donc une famille de sous-espaces vectoriels de E' deux à deux distincts.
Ainsi E' possède une infinité de sous-espaces vectoriels. Ceci achève la démonstration du lemme ■

- Supposons que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Tout sous-espace vectoriel de E_k est stable par f ($\forall x \in E_k$, $f(x) = \lambda_k x$).
Ainsi E_k possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Le lemme montre alors que $\dim E_k \leq 1$. Or par définition $\dim E_k \geq 1$ ($E_k \neq \{0_E\}$).
Ainsi $\dim E_k = 1$.

$$n = \dim E = \dim \bigoplus_{k=1}^{p} E_k = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k = p. \quad p = n.$$

f admet n valeurs propres distinctes.

- Réciproquement supposons que f admette n valeurs propres distinctes. $\underline{\underline{p = n}}$.
$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_k = 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k possède exactement deux sous-espaces vectoriels : $\{0_E\}$ et E_k.
Alors les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont de la forme $\sum_{k=1}^{n} F_k$ avec, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = \{0_E\}$ ou E_k.

Posons, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $F_k^0 = \{0_E\}$ et $F_k^1 = E_k$.

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E stables par f est :

$\mathcal{S} = \{ \sum_{k=1}^{n} F_k^{x_k} \; ; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [\![0,1]\!]^n \}$

Comme $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont en somme directe il est aisé de montrer que :

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in [\![0,1]\!]^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in [\![0,1]\!]^n, \; \sum_{k=1}^{n} F_k^{x_k} = \sum_{k=1}^{n} F_k^{y_k} \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$.

Alors $\mathcal{S}$ et $[\![0,1]\!]^n$ sont équipotents et card $\mathcal{S}$ = card $[\![0,1]\!]^n = 2^n$.

E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f si et seulement si f admet n valeurs propres distinctes. Dans ce cas le nombre de sous-espaces vectoriels de E stables par f est 2^n.

Partie III Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

Q1 a) $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \; D^k(X^k) = k!$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \; D^n(X^k) = D^{n-k}(D^k(X^k)) = D^{n-k}(k!)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \; D^n(X^k) = D^{n-k}(k!) = D^{n-k-1}(D(k!)) = D^{n-k-1}(0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}) = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

D^n et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])}$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. $D^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])}$.

<u>D^n est l'endomorphisme nul.</u>

$D^{n-1}(X^{n-1}) = (n-1)! \neq 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ donc <u>D^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul.</u>

<u>b)</u> • Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si $P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$, $\deg D(P) = -\infty$; si $P \neq 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$, $\deg D(P) = \deg P - 1$. Ainsi $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg D(P) \leq \deg P$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\deg D(P) \leq \deg P \leq k$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall P \in \mathbb{R}_k[X]$, $D(P) \in \mathbb{R}_k[X]$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par D.

$\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont stables par D.

- Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stable par D et distinct de $\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$.

Posons $k = \max\{\deg P \,;\, P \in F\}$. $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $F \subset \mathbb{R}_k[X]$.

Montrons que $F = \mathbb{R}_k[X]$. Soit S un élément de F tel que $\deg S = k$.

Posons $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $S_i = D^{k-i}(S)$.

$\deg S = k$ donc $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\deg D^j(S) = k - j$.

$\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\deg S_j = \deg D^{k-j}(S) = k - (k-j) = j$.

$(S_0, S_1, \dots, S_k)$ est alors une famille d'éléments de $\mathbb{R}_k[X]$ de degrés échelonnés ; $(S_0, S_1, \dots, S_k)$ est donc une famille libre de cardinal $k+1$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $k+1$. $(S_0, S_1, \dots, S_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

$\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(S_0, S_1, \dots, S_k)$.

$S \in F$ et F est stable par D donc $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $S_i = D^{k-i}(S) \in F$.

Ainsi $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(S_0, S_1, \dots, S_k) \subset F$. Ceci achève de prouver que $F = \mathbb{R}_k[X]$.

Par conséquent si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stable par D et différent de $\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$, $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $F = \mathbb{R}_k[X]$.

<u>Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels suivants : $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$.</u>

(Q2) a) Soit a un élément de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.

Montrons que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E. Il suffit de prouver que cette famille est libre car cette famille est de cardinal n qui est la dimension de E.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^k(a) = 0_E$. Montrons à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

- $0_E = f^{n-1}(0_E) = f^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{n-1+k}(a) \underset{\uparrow}{=} \lambda_0 f^{n-1}(a)$. $\quad \lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$.

$f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \geq n$

Comme $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ il vient $\lambda_0 = 0$.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à k élément de $[\![0, n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Nous avons $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et nous devons obtenir $\lambda_{k+1} = 0$.

$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0_E$. Ainsi $\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0_E$.

Alors $0_E = f^{n-1-k}(0_E) = f^{n-1-k}\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(a)\right) = \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-k+i}(a) \underset{\uparrow}{=} \lambda_{k+1} f^{n-1}(a)$.

$f^j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $j \geq n$.

Comme $f^{n-1}(a)$ n'est pas nul il vient $\lambda_{k+1} = 0$ et ainsi s'achève la récurrence.

Nous pouvons ainsi affirmer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

$(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une famille libre de cardinal n de E qui est de dimension n.

$(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E donc $(f^{n-1}(a), f^{n-2}(a), \dots, f(a), a)$ également.

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f^{n-i}(a)$. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

$f(e_1) = f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = 0_E$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $f(e_i) = f(f^{n-i}(a)) = f^{n+1-i}(a) = f^{n-(i-1)}(a) = e_{i-1}$.

Ainsi la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e'_k = (k-1)!\, e_k$.

$\mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, 2e_3, 3!e_4, \dots, (n-1)!e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = E$.

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une famille génératrice de E de cardinal n et $\dim E = n$; ainsi $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de E.

$f(e'_1) = f(e_1) = 0_E$ et $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $f(e'_k) = (k-1)!\, f(e_k) = (k-1)(k-2)!\, e_{k-1} = (k-1)\, e'_{k-1}$.

La matrice de f dans cette base est alors
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ainsi A et B sont les matrices du même endomorphisme.

<u>A et B sont semblables.</u>

c) Posons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

- $f(F_1) = f(\mathrm{Vect}(e_1)) = \mathrm{Vect}(f(e_1)) = \mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\} \subset F_1$

  $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $f(F_k) = f(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_k)) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}) = F_{k-1} \subset F_k$.

  Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k est stable par f. Ajoutons que $\{0_E\}$ est stable par f.

- Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

  Supposons $F \neq \{0_E\}$.

  $F \subset E = F_n$ donc $H = \{k \in [\![1,n]\!] \mid F \subset F_k\} \neq \emptyset$.

  Soit i le plus petit élément de H.

  1er cas.. $i = 1$. $F \subset F_1$, $\dim F_1 = 1$ et $F \neq \{0_E\}$. Alors $F = F_1$ non !

  2e cas.. $i > 1$. $F \subset F_i$ et $F \not\subset F_{i-1}$. Montrons que $F = F_i$. Il suffit de prouver que $\dim F = \dim F_i = i$.

  $\exists u \in F$ et $u \notin F_{i-1}$. $u = \sum_{k=1}^{i} u_k e_k$.

  Notons que u_i n'est pas nul car $u \notin F_{i-1}$.

F et F_i sont stables par f donc $(u, f(u), \dots, f^{i-1}(u))$ est une famille d'éléments de F et de F_i. Cette famille est de cardinal i. Si nous montrons que cette famille est libre nous aurons $\dim F \geq i = \dim F_i \underset{F \subset F_i}{\geq} \dim F$; ainsi nous aurons $F \subset F_i$ et $\dim F = \dim F_i < +\infty$ donc $F = F_i$.

montrer que $(u, f(u), \dots, f^{i-1}(u))$ est libre revient à prouver que $(f^{i-1}(u), f^{i-2}(u), \dots, f(u), u)$ est libre.
Or cette famille est de cardinal i et est constituée d'éléments de F_i. Ainsi pour montrer qu'elle est libre il suffit de prouver que sa matrice S dans la base $(e_1, \dots, e_i)$ de F_i est inversible.

$u = \sum_{k=1}^{i} u_k e_k$. $\forall j \in [\![0, i-1]\!]$, $f^j(u) = \sum_{k=j+1}^{i} u_k e_{k-j} = \sum_{k=1}^{i-j} u_{k+j} e_k$.

Ainsi $S = \begin{pmatrix} u_i & u_{i-1} & \cdots & u_1 \\ 0 & u_i & \cdots & u_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & u_i \end{pmatrix}$. Rappelons que u_i n'est pas nul. S est triangulaire supérieure sans zéro sur sa diagonale donc S est inversible.

Ceci achève alors de montrer que $F = F_i$.

Ainsi si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F = \{0_E\}$ ou $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $F = F_i$.

<u>Finalement les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont $\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, ..., $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$</u>

Partie II Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2.

(Q1) <u>a]</u> $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$; $\forall x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$; $\forall x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Ker} f$. $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

Alors $f(F_2) \subset f(E) = \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. <u>$f(F_2) \subset \mathrm{Ker} f$.</u>

<u>b]</u> Soit $x \in F_1 \cap F_2$. $x \in F_1$ donc $x \in \mathrm{Ker} f$; $x \in F_2 \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, $x = 0_E$.
$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. <u>La somme $F_1 + F_2$ est directe.</u>

Soit x un élément de $F_1 + F_2$. $\exists (!)\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $x = x_1 + x_2$.

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ x_1 \in F_1 \subset \mathrm{Ker} f}}{=} f(x_2) \in f(F_2)$. Comme $f(F_2)$ est contenu dans F_1, $f(x) \in F_1$.

$f(x) \in F_1$ donc $f(x) \in F_1 + F_2$. $\forall x \in F_1 + F_2$, $f(x) \in F_1 + F_2$; <u>$F_1 + F_2$ est stable par f.</u>

c) • $A \subset A+B$ et $B \subset A+B$ donc $A \cap C$ et $B \cap C$ sont contenus dans $(A+B) \cap C$.

Comme $(A+B) \cap C$ est un sous-espace vectoriel de E :

$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A+B) \cap C$.

• → Supposons $\dim E \geq 2$. Soit (e_1, e_2) une famille libre de E.

Posons $A = \mathrm{Vect}(e_1)$, $B = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $C = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

Visiblement $A \cap C = B \cap C = \{0_E\}$.

De plus $A+B = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ contient C.

Ainsi $(A \cap C) + (B \cap C) = \{0_E\}$ et $(A+B) \cap C = C \neq \{0_E\}$.

$(A \cap C) + (B \cap C) \subsetneq (A+B) \cap C$.

Donc si $\dim E \geq 2$ on n'a pas nécessairement $(A \cap C) + (B \cap C) = (A+B) \cap C$.

→ Supposons $\dim E = 1$.

Les sous-espaces de E sont $\{0_E\}$ et E. Soient A, B et C trois sous-espaces de E.

1er cas. $(A \cap C) + (B \cap C) = E$. Alors $E = (A \cap C) + (B \cap C) \subset (A+B) \cap C \subset E$.

Ainsi $(A \cap C) + (B \cap C) = (A+B) \cap C$.

2ème cas. $(A \cap C) + (B \cap C) = \{0_E\}$. Alors $A \cap C = B \cap C = \{0_E\}$.

α) $C = \{0_E\}$. Alors $(A+B) \cap C = \{0_E\}$. $(A \cap C) + (B \cap C) = (A+B) \cap C$.

β) $C = E$. Alors $A \cap C = B \cap C = \{0_E\}$ donc $A = B = \{0_E\}$.

Ainsi $(A+B) \cap C = \{0_E\} \cap C = \{0_E\}$.

On a encore $(A \cap C) + (B \cap C) = (A+B) \cap C$.

Si $\dim E \leq 1$ on a nécessairement $(A \cap C) + (B \cap C) = (A+B) \cap C$.

d) $F_1 \subset F_1 + F_2$ et $F_1 \subset \mathrm{Ker}\, g$; $F_1 \subset (F_1 + F_2) \cap \mathrm{Ker}\, g$ (on ne peut utiliser c) !!)

Montrons l'inclusion contraire.

Soit $x \in (F_1 + F_2) \cap \mathrm{Ker}\, g$. $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $x = x_1 + x_2$.

$x \in \mathrm{Ker}\, g$ donc $g(x) = g(x_1) + g(x_2) = 0_E$; $g(x_2) = 0_E$ car $x_1 \in \mathrm{Ker}\, g$.

Alors $x_2 \in \mathrm{Ker}\, g \cap F_2 = \{0_E\}$; $x_2 = 0_E$. $x = x_1 \in F_1$.

Ainsi $(F_1+F_2)\cap \mathrm{Ker} f = F_1$.

Q2 $f(F)\subset f(E)\subset \mathrm{Ker} f$. $f(F)\subset \mathrm{Ker} f$.

$F_2\subset F$ donc $F_2\cap \mathrm{Ker} f\subset F\cap \mathrm{Ker} f = F_1$.

Ainsi $F_2\cap \mathrm{Ker} f\subset F_1\cap F_2=\{0_E\}$. $F_2\cap \mathrm{Ker} f=\{0_E\}$.

$f(F_2)\subset f(F)\subset F$ et $f(F_2)\subset f(F)\subset \mathrm{Ker} f$. Alors $f(F_2)\subset F\cap \mathrm{Ker} f = F_1$.

$f(F_2)\subset F_1$ ... résultat non demandé mais important pour conclure.

Ainsi si F est un sous-espace vectoriel de E, F est stable par f si et seulement si il existe deux sous-espaces F_1 et F_2 de E tels que : $\begin{cases} F=F_1+F_2 \\ F_2\cap \mathrm{Ker} f=\{0_E\} \\ f(F_2)\subset F_1\subset \mathrm{Ker} f \end{cases}$.

Q3 $M_B(h-2Id_E)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $M_B((h-2Id_E)^2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}((h-2Id_E)^2)=\mathrm{Vect}(e_3, 2e_3+e_4)=\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$. $\mathrm{rg}(h-2Id_E)^2=2$. Alors $G_1=\mathrm{Ker}(h-2Id_E)^2$ est de dimension $4-2=2$. Notons que e_1 et e_2 sont dans G_1 et que la famille (e_1,e_2) est libre.

Tout cela suffit pour dire que $G_1=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.

$M_B(h-3Id_E)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $M_B((h-3Id_E)^2)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Comme pour $h-2Id_E$ on montre que $\mathrm{Im}(h-3Id_E)^2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $\mathrm{Ker}(h-3Id_E)^2=\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$. $G_2=\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ est une base de G_1, $\mathcal{B}_2 = (e_3, e_4)$ est une base de G_2 et $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ est une base de E.

Ceci suffit pour dire que <u>G_1 et G_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.</u>

Q b) • Supposons que $H = H_1 + H_2$ où H_1 est un sous-espace vectoriel de G_1 et H_2 un sous-espace vectoriel de G_2 tous deux stables par h.

$h(H) = h(H_1 + H_2) \subset h(H_1) + h(H_2) \subset H_1 + H_2 = H$; H est stable par h.

• Réciproquement soit H un sous-espace vectoriel de E stable par h.

Posons $H_1 = H \cap G_1$ et $H_2 = H \cap G_2$. Montrons que : $H = H_1 + H_2$.

$H_1 \subset H$, $H_2 \subset H$ et H est un sous-espace vectoriel de E donc $H_1 + H_2 \subset H$.

Montrons que $H \subset H_1 + H_2$. Soit $x \in H$. $\exists!\, (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, $x = x_1 + x_2$.

Pour prouver que x appartient à H_1 et H_2 il suffit de prouver que x_1 et x_2 sont deux éléments de H.

Montrons que $x_1 \in H$. H est stable par h donc H est stable par $P(h)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$, non ?!

$x \in H$ donc $(h - 2Id_E)^2(x) \in H$. Or $(h - 2Id_E)^2(x) = (h - 2Id_E)^2(x_1) + \underbrace{(h - 2Id_E)^2(x_2)}_{= 0_E \text{ car } x_2 \in G_2}$

Ainsi $(h - 2Id_E)^2(x_1) = (h - 2Id_E)^2(x) \in H$.

Alors $h^2(x_1) - 4h(x_1) + 4x_1 \in H$.

Or $x_1 \in G_1$ donc $0_E = (h - Id_E)^2(x_1) = h^2(x_1) - 2h(x_1) + x_1$; $h^2(x_1) = 2h(x_1) - x_1$.

Ainsi $(2h(x_1) - x_1) - 4h(x_1) + 4x_1 \in H$; <u>$3x_1 - 2h(x_1) \in H$.</u>

Alors $h(3x_1 - 2h(x_1)) \in H$. Or $h(3x_1 - 2h(x_1)) = 3h(x_1) - 2h^2(x_1) = 3h(x_1) - 2(2h(x_1) - x_1)$

$h(3x_1 - 2h(x_1)) = -h(x_1) + 2x_1$; <u>$2x_1 - h(x_1) \in H$.</u>

Alors $(3x_1 - 2h(x_1)) - 2(2x_1 - h(x_1)) \in H$; $-x_1 \in H$; $x_1 \in H$.

On montre par des considérations analogues que $x_2 \in H$.

Ainsi $H = H_1 + H_2$ avec $H_1 = H \cap G_1$ et $H_2 = H \cap G_2$.

H, G_1 et G_2 étant trois sous-espaces vectoriels de E, H_1 est un sous-espace vectoriel de G_1 et H_2 est un sous-espace vectoriel de G_2.

Il reste plus qu'à prouver que H_1 et H_2 sont stables par f.

$G_1 = \mathrm{Ker}(P(h))$ avec $P = (X-1)^2$. D'après 5 Q 1 G_1 est stable par h.

Soit $x \in H_1$. $x \in H \cap G_1$; $h(x) \in h(H) \cap h(G_1) \subset H \cap G_1 = H_1$
(H et G_1 sont stables par h.)

Ainsi H_1 est stable par h.

On prouve de même que H_2 est stable par h.

Alors $H = H_1 + H_2$, où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2) stable par h.

Par conséquent les sous-espaces vectoriels de E stables par h sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2) stable par h.

c) Pour trouver les sous-espaces vectoriels de E stables par h il suffit de trouver les sous-espaces vectoriels de G_1 (resp. G_2) stables par h.

Soit h_1 la restriction de h à G_1. Les sous-espaces vectoriels de G_1 stables par h sont les sous-espaces vectoriels de G_1 stables par h_1.

$\dim G_1 = 2$.

Les sous-espaces de G_1 sont $\{0_E\}$, G_1 et les droites vectorielles de G_1.

$\{0_E\}$ et G_1 sont stables par h_1.

Soit D une droite vectorielle de G_1. D est stable par h_1 si et seulement si D est engendrée par un vecteur propre de h_1.

$\mathcal{M}_{(e_1,e_2)}(h_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. h_1 n'a qu'une valeur propre 1.

Un calcul simple montre que le sous-espace propre de h_1 associé à cette valeur propre est $\mathrm{Vect}(e_1)$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(e_1)$ est la seule droite vectorielle de G_1 stable par h_1.

Les sous-espaces vectoriels de G_1 stables par h_1 (resp. h) sont $\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(e_1)$ et G_1.

On montre de même que les sous-espaces vectoriels de G_2 stables par h_2 (resp. h) sont $\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(e_3)$ et G_2.

Ainsi les sous-espaces vectoriels de E stables par h sont $\{0_E\}+\{0_E\}$, $\{0_E\}+\mathrm{Vect}(e_3)$, $0_E + G_2$, $\mathrm{Vect}(e_1) + \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(e_1) + \mathrm{Vect}(e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1) + G_2$, $G_1 + \{0_E\}$, $G_1 + \mathrm{Vect}(e_3)$, $G_1 + G_2$.

Rappelons que $G_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.

<u>Les sous-espaces vectoriels de E stables par h sont : $\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$, $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, E.</u>

PARTIE V Existence d'un plan stable par un endomorphisme.

(Q1) $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2.

Ainsi la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ de $\mathcal{L}(E)$ est liée car elle a pour cardinal n^2+1.

Alors $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$, $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$.

Alors $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>Il existe un polynôme non nul à coefficients réels annulant f.</u>

Posons $\mathcal{I} = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. D'après ce qui précède $\mathcal{I}$ contient un élément non nul.

Alors $\{\deg Q \,;\, Q \in \mathcal{I}$ et $Q \neq 0_{\mathbb{R}[X]}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Ainsi cette partie possède un plus petit élément r. Alors il existe $\Pi \in \mathcal{I}$ tel que $\deg \Pi = r$.

Supposons Π constant. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\Pi = \lambda$. Mieux $\lambda \in \mathbb{R}^*$ car $\Pi \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = \Pi(f) = \lambda Id_E$. Comme λ n'est pas nul : $Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est impossible car E n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

<u>Il existe un polynôme Π non nul à coefficients réels de plus bas degré annulant f et Π n'est pas constant.</u>

Remarque.. On pourra montrer que $\mathcal{I} = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est l'ensemble des multiples de Π.

(Q2) <u>a)</u> $\Pi = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$ avec $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ et $\alpha_r \neq 0$.

Soit z une racine de Π dans $\mathbb{C}$. $\Pi(z) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k z^k = 0$

$\Pi(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \bar{z}^k = \overline{\sum_{k=0}^{r} \alpha_k z^k} = \bar{0} = 0$; $\bar{z}$ est une racine de Π.

<u>Le conjugué de z est une racine de Π.</u>

z et $\bar{z}$ sont deux racines de Π et $z \neq \bar{z}$ car Π n'a pas de racine réelle.

Alors $(X-z)(X-\bar{z})$ divise Π.

$(X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - (z+\bar{z})X + z\bar{z} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$.

Posons $b = -2\mathrm{Re}(z)$ et $c = |z|^2$. b et c sont deux réels et X^2+bX+c divise Π.

Il existe un polynôme du second degré à coefficients réels X^2+bX+c qui divise Π.

b) $\exists \Pi_1 \in \mathbb{R}[X]$, $\Pi = \Pi_1(X^2+bX+c) = (X^2+bX+c)\Pi_1$.

$\Pi_1 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Π_1 n'annule pas f car Π_1 est non nul et de degré strictement inférieur au degré de Π.

Ainsi $\Pi_1(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\exists x \in E$, $\Pi_1(f)(x) \neq 0_E$.

$\Pi(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\Pi = (X^2+bX+c)\Pi_1$

Alors $(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E)\circ \Pi_1(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall y \in E$, $(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E)(\Pi_1(f)(y)) = 0_E$.

$\Pi_1(f)(x) \neq 0_E$ et $(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E)(\Pi_1(f)(x)) = 0_E$.

Alors $\mathrm{Ker}(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$; $f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

c) Soit t un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E)$.

Supposons $(t, f(t))$ liée. Comme t n'est pas nul, $\exists \sigma \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sigma t$.

σ est alors valeur propre de f donc σ est une racine réelle du polynôme annulateur Π de f. Ceci n'est pas possible car Π n'a pas de racine réelle.

Ainsi $(t, f(t))$ est libre et donc $P = \mathrm{Vect}(t, f(t))$ est un plan vectoriel.

$$f(P) = f(\mathrm{Vect}(t, f(t))) = \mathrm{Vect}(f(t), f^2(t)) \underset{t \in \mathrm{Ker}(f^2+bf+c\,\mathrm{Id}_E)}{=} \mathrm{Vect}(f(t), -bf(t)-ct) \subset \mathrm{Vect}(t, f(t)) = P$$

P est un plan vectoriel stable par f.

Il existe un plan de E stable par f.

Remarque.- Ce qui précède vaut encore si l'on suppose simplement que z est une racine de Π appartenant à $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ (au lieu de le fait que Π n'a pas de racine réelle).

Q3 a) $0_{\mathcal{L}(E)} = \pi(f) = \alpha(f - \lambda Id_E)^p = \alpha g^p$ et $\alpha \neq 0$. Ainsi $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrons que $g^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons $g^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\alpha(f - \lambda Id_E)^{p-1} = \alpha g^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\alpha(X-\lambda)^{p-1}$ est un polynôme annulateur non nul de f dont le degré est strictement inférieur au degré de π. Ceci est impossible !

Ainsi $g^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\exists x \in E$, $g^{p-1}(x) \neq 0_E$. Une démonstration analogue à celle faite dans III Q2 a) montre que $(x, g(x), \dots, g^{p-1}(x))$ est libre.

<u>Il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, g(x), \dots, g^{p-1}(x))$.</u>

b) Posons $P = Vect(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))$.

$(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))$ est une famille libre de E comme sous-famille d'une famille libre.

Ainsi P est un plan vectoriel. $g(P) = g(Vect(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))) = Vect(g^{p-1}(x), g^{p}(x)) = Vect(g^{p-1}(x))$

Par conséquent $g(P) \subset P$; P est stable par g et donc par $g + \lambda Id_E = f - \lambda Id_E + \lambda Id_E = f$.

<u>Il existe un plan de E stable par f.</u>

Q4 <u>1er cas..</u> π a une racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tout ce qui a été fait dans Q2 s'applique et montre alors qu'il existe un plan de E stable par f.

<u>2e cas..</u> Toutes les racines de π sont réelles.

<u>a)</u> π admet au moins deux racines distinctes.

$\exists(\alpha, \beta)$ $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\pi(\lambda_1) = \pi(\lambda_2) = 0$.

Montrons que λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres de f.

$\exists Q_1 \in \mathbb{R}[X]$, $\pi = (X - \lambda_1) Q_1$. $Q_1(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $Q_1 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $\deg Q_1 < \deg \pi$.

$\exists y_1 \in E$, $Q_1(f)(y_1) \neq 0_E$. Posons $x_1 = Q_1(f)(y_1)$.

$(f - \lambda_1 Id_E)(x_1) = [(f - \lambda_1 Id_E) \circ Q_1(f)](y_1) = \pi(f)(y_1) = 0_E$. $x_1 \neq 0_E$ et $f(x_1) = \lambda_1 x_1$.

De même $\exists x_2 \in E$, $x_2 \neq 0_E$ et $f(x_2)=\lambda_2 x_2$.

λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres de f. x_1 et x_2 sont deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes ; (x_1, x_2) est alors une famille libre de E.

Ainsi $P = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ est un plan vectoriel de E.

De plus $f(P) = \mathrm{Vect}(f(x_1), f(x_2)) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) \subset \mathrm{Vect}(x_1, x_2) = P$; P est stable par f.

Il existe un plan de E stable par f

<u>b]</u> Π admet une seule racine réelle.

Comme Π n'a que des racines réelles : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\Pi = \alpha(X-\lambda)^p$.

α). • $p \geqslant 2$. Nous sommes ramené à §3. Il existe un plan de E stable par f.

β). • $p = 1$. $\Pi = \alpha(X-\lambda)$. $0_{\mathcal{L}(E)} = \Pi(f) = \alpha(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

$f - \lambda \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Tout sous-espace vectoriel de E est stable par f.

Il existe un plan de E stable par f... au moins si $\dim E \geqslant 2$!!

<u>Dans tous les cas, si $\dim E \geqslant 2$, il existe un plan de E stable par f.</u>

Tiens, c'est fini!