

**EXERCICE I**

Dans tout l'exercice  $n$  désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a) Etudier, suivant la parité de  $n$ , le tableau de variations de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto x^{n+1} + x^n$ .
- b) Montrer que dans tous les cas  $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$ .
- c) En déduire, suivant la parité de  $n$ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x$  :

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer qu'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

- a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue  $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Soit  $Y$  une solution de  $(E'_n)$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- i. Montrer que  $DY = YD$ .
- ii. En déduire que  $b = c = 0$ .
- iii. Quelles sont les valeurs possibles de  $a$  ?
- iv. Discuter, suivant les valeurs de  $n$ , le nombre de solutions de l'équation  $(E_n)$ .

- c) On note  $\mu$  la solution négative de l'équation numérique  $x^4 + x^3 = 2$ . Déterminer les solutions de l'équation  $(E_3)$  à l'aide de  $\mu$ .

**EXERCICE II**

On désigne par  $\lambda$  un paramètre réel strictement supérieur à 1. Soit  $H$  l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $x > 0$  et soit  $D$  l'ensemble des points de  $H$  tels que  $y \neq 0$ .

L'objet de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction  $f$  définie sur  $H$  par

$$f(x, y) = x^\lambda y - y^2 - y \ln(x + 1) + 1.$$

1. Soit  $\phi$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $\phi(x) = x^\lambda - \ln(x + 1)$  et  $\phi'$  sa dérivée.

- a) Montrer que l'équation  $\phi'(x) = 0$  admet une racine et une seule dans  $]0, +\infty[$ .  
On note  $b$  cette racine et on pose  $\phi(b) = 2c$ . Montrer que  $c < 0$ .
- b) Montrer que l'équation  $\phi(x) = 0$  admet une racine et une seule, notée  $a$ , dans  $]0, +\infty[$  et que  $a > b$ .
2. Calculer les dérivées partielles  $f'_x$  et  $f'_y$  de la fonction  $f$ .
3. a) Déterminer l'ensemble des points  $(x, y) \in H$  vérifiant  $f'_x(x, y) = 0$ .  
b) Déterminer les points  $(x, y) \in H$  vérifiant  $f'_x(x, y) = 0$  et  $f'_y(x, y) = 0$ . On exprimera les solutions  $(x, y)$  trouvées à l'aide des nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  définis à la question 1.
4. a) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ .  
b) Montrer que  $f$  admet dans  $D$  un extremum en un unique point  $(x_\lambda, y_\lambda)$  que l'on précisera.

### EXERCICE III

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité  $P$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  une variable aléatoire réelle vérifiant  $P(X_n = k) = \frac{1}{n}$  pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n - 1$ . On pose  $Y_n = \frac{X_n}{n}$ .

D'autre part, soit  $Z$  une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

1. a) Déterminer l'espérance  $E(Z)$  et la variance  $V(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$ .  
b) Calculer, pour tout  $n \geq 1$ , l'espérance et la variance de  $Y_n$ .  
Déterminer les limites des suites  $(E(Y_n))_{n \geq 1}$  et  $(V(Y_n))_{n \geq 1}$ .  
c) Montrer que, pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles, strictement monotone, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z))$ .
2. Pour tout réel  $x$  on note  $\text{Ent}(x)$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .
- a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ent}(nx)}{n} = x$ .  
b) Soit  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $0 \leq a \leq b \leq 1$  et soit  $I_n(a, b)$  le nombre d'entiers  $k$  vérifiant  $a < \frac{k}{n} \leq b$ . Montrer que  $I_n(a, b) = \text{Ent}(nb) - \text{Ent}(na)$ .  
c) Montrer que, si  $0 \leq a \leq b \leq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Z \leq b)$ .
3. Pour tout entier  $n \geq 1$  on note  $Z_n$  la variable aléatoire  $\frac{1}{n} \text{Ent}(nZ)$  et on pose  $D_n = Z - Z_n$ .
- a) Montrer  $Z_n$  et  $Y_n$  ont même loi de probabilité.  
b) Trouver la fonction de répartition et une densité de  $D_n$ .  
c) Pour un entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n - 1$  et un réel  $y$  tel que  $0 \leq y \leq \frac{1}{n}$ , exprimer à l'aide de la variable aléatoire  $Z$  l'événement  $\{Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\}$ . En déduire la valeur de  $P(Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y)$ .  
d) Montrer que les variables aléatoires  $Z_n$  et  $D_n$  sont indépendantes.