ESCP 1998 Option Eco Mathématiques III

EXERCICE I

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = (n+1)x^{n-1}(x + \dfrac{n}{n+1})$

Si n est pair, on a alors $n-1$ impair et le signe de f' est alors :

x			$-\frac{n}{n+1}$		0		
x^{n-1}		$-$		$-$	0	$+$	
$x+n/(n+1)$		$-$	0	$+$		$+$	affine
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f()$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est impair, on a alors $n-1$ pair et le signe de f' est alors :

x			$-\frac{n}{n+1}$		0		
x^{n-1}		$+$		$+$	0	$+$	
$x+n/(n+1)$		$-$	0	$+$		$+$	affine
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f()$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Si n est impair, on a d'après le sens de variation, $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < f(0) = 0 < 2$

Si n est pair, $\dfrac{n}{n+1} < 1$ donc $\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1^n$ et $\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 0$ donc $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$

c) $f(1) = 2$ donc d'après les variations, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[0, +\infty[$: $x = 1$

- Si n est pair, d'après les variation de f et $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$ il n'y a pas de solution sur $]-\infty, 0]$
  et elle a donc $x = 1$ pour unique solution sur $\mathbb{R}$
- si n est impair, on utilise le théorème de bijection sur $\left]-\infty, -\dfrac{n}{n+1}\right]$:
  f est continue et strictement décroissante sur $I =]-\infty, -\dfrac{n}{n+1}]$ donc bijective de I dans $\left[f(-\frac{n}{n+1}), +\infty\right[$.
  Comme $f(-\dfrac{n}{n+1}) < 2$ alors $2 \in f(I)$ et l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $I =]-\infty, -\dfrac{n}{n+1}]$.
  D'après les variation de f, elle n'en a pas sur $]-\dfrac{n}{n+1}, 0]$,
  Elle a donc deux solutions : $\mu < 0$ et 1.

2. Ilsuffit de vérifier que 0 et 2 sont vlaeurs propres de A :

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x+y=0 \iff y=-x$ donc 0 est valeur propre associée au sous espace propre Vect $((1,-1))$

$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff y=x$ donc 2 est valeur propre associée au sous espace propre Vect $((1,1))$

Comme A possède deux valeurs porpres distincetes, elle est diagonalisable et $((1,-1),(1,1))$ est une base de vecteurs propres.

Donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A = P\ D\ P^{-1}$ et on a $P\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Si $X^{n+1} + X^n = A$, alors $P^{-1} \cdot (X^{n+1} + X^n)P = P \cdot A \cdot P^{-1}$
   donc $P^{-1} \cdot X^{n+1} \cdot P + P^{-1} \cdot X^n \cdot P = D$ et enfin $(P^{-1}XP)^{n+1} + (P^{-1}XP)^n = D$
   Donc en posant $Y = P^{-1}XP$, si (E_n') alors (E_n).
   Réciproquement, si $Y^{n+1} + Y^n = D$ alors $(PYP^{-1})^{n+1} + (PYP^{-1})^n = PDP^{-1}$
   Donc $(E_n) \Leftrightarrow (E_n')$ par le changement de variable $Y = P^{-1}XP$

   b) Soit Y une solution de (E_n'). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

      i. Si Y est solution de (E_n') alors $Y^{n+1} + Y^n = D$ donc
      $DY = (Y^{n+1} + Y^n)Y = Y^{n+2} + Y^{n+1} = Y(Y^{n+1} + Y^n) = Y.D$

      ii. Comme $YD = DY$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
      donc $\begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ et $c=0$ et $b=0$

      iii. Donc $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale, on connait donc ses puissances : $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$
      et $Y^{n+1}+Y^n = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1}+a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1}+d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{n+1}+a^n = 0 \\ d^{n+1}+d^n = 2 \end{cases}$
      Or $a^{n+1} + a^n = a^n(a+1)$ donc la première équation a apour solutions $a=-1$ et $a=0$

      iv. La seconde équation a pour solutions unique solution $d=1$ si n est pair et $d = \mu$ et $d=1$ si n est impair.
      On a donc
      - si n pair, 2 solutions pour (E_n') et donc 2 solutions pour (E_n) via le changement de variable $X = PYP^{-1}$
      - si n impair, 4 solutions (4 valeurs possibles pour le couple (a,d)) pour (E_n') et donc 2 solutions pour (E_n)

   c) L'équation $x^4 + x^3 = 2$ est l'équation (E_3). 3 est impair. Elle a donc 4 solutions :
   $PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & -a+d \\ -a+d & a+d \end{pmatrix}$

avec $a=-1$ ou 0 et $d=\mu$ ou $d=1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\mu & -1+\mu \\ 1+\mu & 1+\mu \end{pmatrix}$
et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}$

EXERCICE II

On désigne par λ un paramètre réel strictement supérieur à 1. Soit H l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x>0$ et soit D l'ensemble des points de H tels que $y\neq 0$. L'objet de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur H par

$$f(x,y)=x^\lambda y-y^2-y\ln(x+1)+1.$$

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\phi(x)=x^\lambda-\ln(x+1)$ et ϕ' sa dérivée.
   a) Montrer que l'équation $\phi'(x)=0$ admet une racine et une seule dans $]0,+\infty[$.
   On note b cette racine et on pose $\phi(b)=2c$. Montrer que $c<0$.
   b) Montrer que l'équation $\phi(x)=0$ admet une racine et une seule, notée a, dans $]0,+\infty[$ et que $a>b$.
2. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction f.
3. a) Déterminer l'ensemble des points $(x,y)\in H$ vérifiant $f'_x(x,y)=0$.
   b) Déterminer les points $(x,y)\in H$ vérifiant $f'_x(x,y)=0$ et $f'_y(x,y)=0$. On exprimera les solutions (x,y) trouvées à l'aide des nombres a, b et c définis à la question **1**.
4. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   b) Montrer que f admet dans D un extremum en un unique point (x_λ,y_λ) que l'on précisera.

EXERCICE III

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité P.

Pour tout entier $n\geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $P(X_n=k)=\dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0\leq k\leq n-1$. On pose $Y_n=\dfrac{X_n}{n}\cdot$

D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. a) Z a pour densité : $u(t)=1$ sur $[0,1]$ et 0 ailleurs.
   On a $E(Z)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$
   $E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2u(t)\,dt=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$ et $V(Z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
   Conclusion : $\boxed{E(Z)=\frac{1}{2} \text{ et } V(Z)=\frac{1}{12}}$
   b) On a $E(X_n)=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{1}{n}=\frac{(n-1)n}{2n}=\frac{n-1}{2}$
   $E(X_n^2)=\sum_{k=0}^{n-1}k^2\frac{1}{n}=\frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6n}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$
   et $V(X_n)=E(X_n^2)-E(X_n)^2=\frac{(n-1)(2n-1)}{6}-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=\frac{(n-1)(4n-2-3n+3)}{12}=\frac{n^2-1}{12}$
   Et comme $Y_n=\frac{X_n}{n}$ alors $E(Y_n)=\frac{1}{n}E(X_n)=\frac{n-1}{2n}$ et $V(Y_n)=\frac{1}{n^2}V(X_n)=\frac{n^2-1}{12n^2}$
   Conclusion : $\boxed{E(Y_n)=\frac{n-1}{2n}\to\frac{1}{2} \text{ et } V(Y_n)=\frac{n^2-1}{12n^2}\to\frac{1}{12}}$

c) par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E\left(f\left(Y_n\right)\right) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} f(y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(Y=\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}$$

pour f continue sur $[0,1]$ (sommes de Rieman)
d'autre part, le théorème de transfert (hypothèses 2007 : f continue et intégrale absolument convergente, hypothèses 1998 : f C^1 et strictement monotonne) $E\left(f\left(Z\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,u(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$

Conclusion : $\boxed{E\left(f\left(Y_n\right)\right) \to E\left(f\left(Z\right)\right) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

2. Pour tout réel x on note $\mathrm{Ent}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.

a) On a $\mathrm{Ent}(x) \leq x$ et comme c'est le plus grand, $\mathrm{Ent}(x)+1$ est trop grand !
On a donc $\mathrm{Ent}(x) \leq x < \mathrm{Ent}(x)$
Et avec nx :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(nx) &\leq nx < \mathrm{Ent}(nx)+1 \text{ donc} \\
\frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n} &\leq x < \frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n}+\frac{1}{n} \text{ et en inversant :} \\
x-\frac{1}{n} &< \frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n} \leq x
\end{aligned}$$

et par encadrement

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n} = x.}$

b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a,b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que $a < \frac{k}{n} \leq b \Longleftrightarrow na < k \leq nb$ avec, pour k entier,
$k \leq nb \Longleftrightarrow k \leq \mathrm{Ent}(nb)$ pour k entier et car $\mathrm{Ent}(nb)$ est le plus grand de ceux vérifiant $k \leq nb$
$na < k \Longleftrightarrow \mathrm{Ent}(na) < k \Longleftrightarrow \mathrm{Ent}(na)+1 \leq k$ car k n'est pas de ceux vérifiant $k \leq na$
Donc $a < \frac{k}{n} \leq b \Longleftrightarrow k \in [[\mathrm{Ent}(na)+1, \mathrm{Ent}(nb)]]$ dont le cardinal est $I_n(a,b)$

Conclusion : $\boxed{I_n(a,b) = \mathrm{Ent}(nb) - \mathrm{Ent}(na)}$.

c) Si $0 \leq a \leq b \leq 1$,
Sur les événements,

$$(a < Y_n \leq b) = \bigcup_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ a<y\leq b}} (Y=y)$$

Or, les valeurs de Y sont les $\frac{k}{n}$, avec k entier de $[0,1[$.
Donc $(a < Y_n \leq b)$réunion de $I_n(a,b)$ événements incompatibles, de probabilté $\frac{1}{n}$ ($0 \leq a \leq b \leq 1$)
Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(a < Y_n \leq b) &= \frac{I_n(a,b)}{n} \\ &= \frac{\mathrm{Ent}(nb) - \mathrm{Ent}(na)}{n} \\ &= \frac{\mathrm{Ent}(nb)}{n} - \frac{\mathrm{Ent}(na)}{n} \\ &\to b - a \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } 0 \leq a \leq b \leq 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Z \leq b).}$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\mathrm{Ent}(n\,Z)$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.
   a) $\mathrm{Ent}(nZ)$ est un entier.
   et $(\mathrm{Ent}(nZ) = k) = (k \leq nZ < k+1) = \left(\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right)$
   Donc si $k \notin [[0, n-1]]$ alors $\mathrm{P}(\mathrm{Ent}(nZ) = k) = 0$
   et si $k \in [[0, n-1]]$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{Ent}(nZ) = k) &= \mathrm{P}\left(\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1dt \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ent}(n\,Z)$ a la même loi que X_n.
   Et comme $Y_n = \frac{1}{n}X_n$ et $Z_n = \frac{1}{n}\mathrm{Ent}(n\,Z)$ alors
   Conclusion : $\boxed{Z_n \text{ et } Y_n \text{ ont même loi de probabilité.}}$
   b) On a $0 \leq nZ - \mathrm{Ent}(n\,Z) < 1$ donc $0 \leq D_n < 1/n$ et
   - si $x < 0$ alors $\mathrm{P}(D_n \leq x) = 0$
   - si $x \geq \frac{1}{n}$ alors $\mathrm{P}(D_n \leq x) = 1$
   - Enfin, si $0 \leq x < \frac{1}{n}$ alors

$$\begin{aligned} (D_n \leq x) &= (0 \leq D_n \leq x) \\ &= (0 \leq Z - Z_n \leq x) \end{aligned}$$

   qui dépend de la valeur de Z_n.
   $\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D_n \leq x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}\left(0 \leq Z - Z_n \leq nx \cap Z_n = \frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}\left(\frac{k}{n} \leq Z \leq \frac{k}{n} + x\right) \text{ (si ...alors et réciproque car } nx < 1 \text{)} \\ &= n \cdot x \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F(x) = \mathrm{P}(D_n \leq x) = 0 \text{ si } x < 0;\ F(x) = nx \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{n}\,;\ F(x) = 1 \text{ si } x \geq \frac{1}{n}}$

Cette fonction de répartition est continnue sur $]-\infty, 0[$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ et sur $[0, +\infty[$

En 0^+ : $F(x) = nx \to 0 = F(0)$ quand $x \to 0^+$ idem en 1.

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{1}{n}\right\}$ donc D_n est une variable à densité.

une densité est : $f(x) = F'(x) = n$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 sinon.

Conclusion : $\boxed{D_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}}$

c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$,

$\{Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\}$ a été vu ci dessus, avec

$\{Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\} = \left\{\frac{k}{n} \leq Z \leq \frac{k}{n} + y\right\}$

et $\mathrm{P}\left(Z_n = \dfrac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\right) = y$

d) On test : $\mathrm{P}\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)\mathrm{P}(D_n \leq y) = \frac{1}{n}ny = \mathrm{P}\left(Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\right)$

pour $y \in [0, 1[$ et nullité partagée sinon.

Conclusion : $\boxed{Z_n \text{ et } D_n \text{ sont indépendantes.}}$