ESCP 1997

Option Economique

Mathématiques III

EXERCICE I

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, u l'application identique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$dans lui même et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ représentant u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
0n considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Etant donné un couple (a, b) de réels, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $af+bu$ de $\mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de (a, b) cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Quelles relations le couple (a, b) doit-il vérifier pour que l'endomorphisme $af+bu$ soit inversible? Montrer que l'inverse de $af + bu$, quand il existe, est de la forme $\lambda f + \mu u$ où λ et μ sont des réels dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est à dire qui vérifient $AT = TA$.

4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

5. Pour une matrice T de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, calculer $AT - TA$. En déduire une base de $\mathcal{E}$ et sa dimension.

6. Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui même qui fait correspondre à la matrice T la matrice $AT - TA$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base du noyau et une base de l'image de Φ

EXERCICE II

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda = e^{-\lambda x^2}$, pour tout réel x.
Le but de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. **a)** Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x, admet une seule racine dans $\mathbb{R}$ et que cette racine appartient à $]0, 1[$. On note ℓ_λ cette racine.

b) Montrer que, si $\lambda > \dfrac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

2. On suppose dans cette question que $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'_\lambda(x)| < 1$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ_λ.

On revient au cas général, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.

a) Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4. **a)** Montrer que les racines éventuelles de l'équation $g_\lambda(x) = x$ appartiennent à $]0,1[$. Vérifier queℓ_λ est une racine de cette dernière équation.

b) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$

c) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$
Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0,1[$ et que $h'_\lambda(x)$ a le signe opposé de celui de $1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$

d) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$. Dresser le tableau de variation de la fonction k_λ.

e) On se place désormais dans le cas où $\lambda > \dfrac{e}{2}$

- Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$
- Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $h_\lambda(x) = x$ admet trois racines μ_λ, ℓ_λ, ν_λ vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$
- Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.

EXERCICE III

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a, et que la probabilité que la pièce B donne pile est b.

1. **a)** Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier face pour la pièce A.
les lancers étant indépendants, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a)$
Et comme l'événement
"la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)^{ième}$ expérience, face pour la première fois" est $(Z = n+1)$
alors $\mu_n = a^n(1-a)$ et de même pour $\nu_n = b^n(1-b)$
Conclusion : $\boxed{\mu_n = a^n(1-a) \text{ et } \nu_n = b^n(1-b) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b) Les valeurs de μ_n sont positives et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \mu_n &= \sum_{n=0}^{M} a^n(1-a) \\ &\to (1-a)\frac{1}{1-a} = 1\end{aligned}$$

car $|a| < 1$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1$ et de même pour ν.
Conclusion : $\boxed{(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définissent des lois de probabilité sur } \mathbb{N}}$

2. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement μ et ν. (La variable aléatoire X représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne face pour la première fois).

a) On a $X = Z-1$ donc X a une espérance et $E(X) = E(Z-1) = E(Z)-1 = \frac{1}{1-a}-1 = \frac{a}{1-a}$ et $V(X) = V(Z) = \frac{a}{(1-a)^2}$

b) $(X \geq k)$ est l'événement "le premier face est après k" ou encore, "iln'y a que des Piles jusqu'au $k^{ième}$"

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq k) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i\right) \\ &= a^k \end{aligned}$$

(en fait, dans cette interprètation, on inclus l'événement "n'avoir que des piles" pour lequel X n'est pas défini, mais qui est de proabbiltié nulle)

c) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
On a $(M \geq k) =$"les deux sont supérieurs à k" donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M \geq k) &= \mathrm{P}(X \geq k \cap y \geq k) \\ &= \mathrm{P}(X \geq k)\,\mathrm{P}(Y \geq k) \\ &= (ab)^k \end{aligned}$$

Comme $(M \geq k) = (M = k) \cup (M > k)$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M = k) &= \mathrm{P}(M \geq k) - \mathrm{P}(M > k) \\ &= \mathrm{P}(M \geq k) - \mathrm{P}(M \geq k+1) \ \text{ car } M \text{ entier} \\ &= (ab)^k - (ab)^{k+1} \\ &= (ab)^k (1-ab) \end{aligned}$$

d) On a $(Y \geq X) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k \cap Y \geq k)$ donc (disjoints)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \geq X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k (1-a)\, b^k \\ &= (1-a) \sum_{k=0}^{+\infty} (ab)^k \\ &= \frac{1-a}{1-ab} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y \geq X) = \dfrac{1-a}{1-ab}}$

3. On note $U = X + Y$.

a) On a $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(U = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k \cap Y = n - k)$ avec k et $n - k \geq 0$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k (1 - a)\, b^{n-k} (1 - b) \\ &= (1 - a)\, b^n (1 - b) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k \quad \text{et si } a \neq b \\ &= (1 - a)\, b^n (1 - b) \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} \\ &= (1 - a)\, b^n (1 - b) \frac{b}{b^{n+1}} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(U = n) = (1 - a)(1 - b) \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} \text{ si } a \neq b}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(U = n) = (n + 1)\, a^n (1 - a)^2 \text{ si } a = b}$

b) Pour tout couple (j, k) d'entiers naturels,
$\mathrm{P}_{U=j}(Y = k)$ se calcule en se ramenant à ce que l'on connait : le couple (X, Y)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{U=j}(Y = k) &= \frac{\mathrm{P}(Y = k \cap U = j)}{\mathrm{P}(U = j)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y = k \cap X = j - k)}{\mathrm{P}(U = j)} \\ &= 0 \text{ si } j < k \\ &= \frac{b^k (1 - b)\, a^{j-k} (1 - a)}{(1 - a)(1 - b) \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{b - a}} \text{ si } a \neq b \\ &= \frac{b^k a^{j-k} (b - a)}{b^{j+1} - a^{j+1}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } a \neq b : \mathrm{P}_{U=j}(Y = k) = \dfrac{b^k a^{j-k} (b - a)}{b^{j+1} - a^{j+1}} \text{ si } j \geq k \text{ et } 0 \text{ sinon}}$

si $a = b$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{U=j}(Y = k) &= \frac{a^k (1 - a)\, a^{j-k} (1 - a)}{a^j (1 - a)^2 (j + 1)} \text{ si } a \neq b \\ &= \frac{1}{j + 1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } a = b : \mathrm{P}_{U=j}(Y = k) = \dfrac{1}{j + 1} \text{ si } j \geq k \text{ et } 0 \text{ sinon}}$

donc Y suit une loi uniforme sur $[[0, j]]$ quand $X + Y = k$ étonnant, non ?

4. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.

a) On exprime $(M = k \text{ et } V = r)$ en fonction de X et de Y :

- si $r \geq 0$ alors quand $(Y - X = r)$ on a $Y \geq X$ donc $\min(Y, X) = X$
  donc $(M = k \text{ et } V = r) = (X = k \cap Y - X = r) = (X = k \cap Y = r + k)$
  et $\mathrm{P}(M = k \text{ et } V = r) = a^k (1 - a) a^{r+k} (1 - a)$
  Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(M = k \cap V = r) = a^{2k+r} (1 - a)^2}$
- si $r < 0$ alors quand $(Y - X = r)$ on a $Y < X$ donc $\min(Y, X) = Y$
  donc $(M = k \text{ et } V = r) = (Y = k \cap Y - X = r) = (Y = k \cap X = k - r)$
  et $\mathrm{P}(M = k \text{ et } V = r) = a^k (1 - a) a^{k-r} (1 - a)$ (on a $k - r \geq 0$)
  Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(M = k \cap V = r) = a^{2k-r} (1 - a)^2}$

b) La loi de V est donc loi marginale.

- si $r < 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V = r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(M = k \cap V = r) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k-r} (1 - a)^2 \\
&= \frac{(1-a)^2}{a^r} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a^2\right)^k \\
&= \frac{(1-a)^2}{a^r} \frac{1}{1 - a^2} \\
&= \frac{1 - a}{a^r (1 + a)}
\end{aligned}$$

- et si $r \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V = r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(M = k \cap V = r) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k+r} (1 - a)^2 \\
&= a^r \frac{1 - a}{1 + a}
\end{aligned}$$

On teste pour $r \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V = r) \mathrm{P}(M = k) &= a^r \frac{1 - a}{1 + a} a^{2k} \left(1 - a^2\right) \\
&= a^{2k+r} (1 - a)^2 \\
&= \mathrm{P}(M = k \cap V = r)
\end{aligned}$$

et pour $r < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V = r) \mathrm{P}(M = k) &= a^{-r} \frac{1 - a}{1 + a} a^{2k} \left(1 - a^2\right) \\
&= a^{2k-r} (1 - a)^2 \\
&= \mathrm{P}(M = k \cap V = r)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } a = b, \text{ les variables } M = \min(X, Y) \text{ et } V = X - Y \text{ sont indépendantes}}$
l'écart entre les deux est indépendant de la valeur du plus petit des deux !