ESCL 1998

Mathématiques I Option Economique

Exercice 1

1. Soit $x \in [0,1[$.(on a le même résultat sur [-1,1[)

   a) On calcule pur tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \neq 1$

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} + \frac{t^{n+1}-1}{t-1} = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

   b) Or si $0 \leq t \leq x < 1$ alors $0 \geq -t \geq -x > 0$ et $1-t \geq 1-x > 0$. Et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que $1-t$ et $1-x$ en sont éléments, $\dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$. D'où comme $t \geq 0$, $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1-t} = \left|\dfrac{t^{n+1}}{1-t}\right| \leq \dfrac{t^{n+1}}{1-x}$ et finalement :

$$\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leq$$

   c) On reconnait là l'intégrale de 0 à x de l'inégalité précédente :
   Comme $0 \leq x$

$$\left|\int_0^x \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| dt \leq \int_0^x \frac{t^{\ n+1}}{1-x} dt$$

   Et en primitivant la somme (la dérivée de la somme est la somme des dérivées)

$$\left|\left[-\ln(1-t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{x}\right| \leq \left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)\,(1-x)}\right]_{t=0}^{x}$$

$$\left|-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

   d) Donc par encadrement (la valeur absolue est positive) la différence tend vers 0 et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ tend vers $-\ln(1-x)$ quand n tend vers $+\infty$.

   Donc en réindexant par $h = k+1$, la série $\displaystyle\sum_{h \geq 1} \frac{x^h}{h}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$

   En particulier, pour $x = 1/2$ qui est bien dans l'intervalle $[0,1[$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$

e) On utilise la formule des probabilités totales : En notant N le nombre de lancers pour obtenir le premier $pile$, $N\,(N=n) \hookrightarrow_{n\in\mathbb{N}^*} une$ loi géométrique de paramètres 1/2 (car le nombre de lancer pour le premier $pile$ ne change pas si l'on continue les lancers et qu'ils sont donc indépendants).

$(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc la série $\sum_{n\geq 1} p\,(G/N=n)\,p\,(N=n)$ converge et la somme de la série est $p\,(G)$. Comme $p\,(G/N=n)=1/n$ car les billets sont équiprobables,

$$p\,(G)=\sum_{n=1}^{+\infty} p\,(G/N=n)\,p\,(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\ln(2)$$

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
.

1. a) Calculer A^2 et A^3 .
   b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.
   c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé ý la valeur propre 0.
   d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

   a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient à E.
   b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

   a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
   b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
   En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
   Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé ý la valeur propre 1.
   c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

   a) N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage.
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et de même } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$

   b) $(N_v = 1 \cap N_B = 1) = \emptyset$ car on ne peut pas avoir une V et une B au même tirage.
   Donc $\mathrm{P}(N_v = 1 \cap N_B = 1) = 0 \neq \mathrm{P}(N_v = 1)\,\mathrm{P}(N_B = 1)$
   Conclusion : $\boxed{N_V \text{ et } N_B \text{ ne sont pas indépendantes :}}$

On définit le couple de variables aléatoires $(X,\, Y)$ à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

pour tout $(i,\, j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement :

" les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$ est verte"

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = k)$ signifie que l'on a k verte puis une blanche ou inversement.
   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)) \\
&= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\
&= (1-p)^k\, p + p^k (1-p)
\end{aligned}$$

   b) X a une espérance si la série suivante est absoulment convergente, ce qui équivaut à la convergence simple car les termes sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[(1-p)^k p + p^k(1-p)\right] \\
&= p\sum_{k=1}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=1}^{M} kp^k \\
&= p\sum_{k=0}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=0}^{M} kp^k \\
&\to p\frac{1-p}{(1-1+p)^2} = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

car $|p| < 1$ et $|1-p| < 1$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que } E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.}$

c) On étudie les variations de $E(X)$ fonction de p :
$f(p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{1-p+p}{(1-p)^2} + \frac{-p-1+p}{p^2} \\
&= \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Donc

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$2p-1$		$-$	0	$+$	affine
$f'(p)$		$-$		$+$	
$f(p)$		$\searrow$		$\nearrow$	

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Conclusion : $\boxed{E(X) \text{ est minimale lorsque } p = \frac{1}{2}, \text{ et vaut alors } 2}$
C'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore le splus courtes.

3. Pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$\begin{aligned}
(X = i \text{ et } Y = j) &= (B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \cdots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\
&\quad \cup (V_1 \cap \cdots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1})
\end{aligned}$$

les deux () étant incompatibles, et les tirages indépendants, on a

$$\mathrm{P}(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a) La loi de Y est la seconde loi marginale :
$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i \text{ et } Y=j) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1} p^j\right] \\
\sum_{i=1}^{M} \text{''} &= (1-p)^j p \sum_{i=1}^{M} p^i + p^j (1-p) \sum_{i=1}^{M} (1-p)^i \\
&\to (1-p)^j p \left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p^j (1-p) \left(\frac{1}{p} - 1\right) \text{ donc} \\
\mathrm{P}(Y=j) &= (1-p)^{j-1} p^2 + p^{j-1} (1-p)^2
\end{aligned}$$

b) La convergence absolue de la série $\sum_{j\geq 1} j\mathrm{P}(Y=j)$ équivaut à sa convergence simple.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{M} j\mathrm{P}(Y=j) &= \sum_{j=1}^{M} j(1-p)^{j-1} p^2 + \sum_{j=1}^{M} jp^{j-1}(1-p)^2 \\
&= \frac{p^2}{1-p} \sum_{j=1}^{M} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{j=1}^{M} jp^j \\
&\to \frac{p^2}{1-p} \frac{1-p}{p^2} + \frac{(1-p)^2}{p} \frac{p}{(1-p)^2} = 2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = 2}$

5. a) Si $p \neq \frac{1}{2}$,
et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=1 \cap Y=1) &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\
&= (1-p)\left(p^2 + (1-p)p\right) \\
&= p(1-p) \\
\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) &= [(1-p)p + p(1-p)]\left[p^2 + (1-p)^2\right] \\
&= 2(1-p)p\left[2p^2 - 2p + 1\right] \\
(1) - (2) &= (1-p)p\left[1 - 2\left(2p^2 - 2p + 1\right)\right] \\
&= (1-p)p\left[-4p^2 + 4p - 1\right] \\
&= -(1-p)p[2p-1]^2
\end{aligned}$$

et comme $p \neq 1/2$ $\mathrm{P}(X=1 \cap Y=1) \neq \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1)$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p \neq \tfrac{1}{2} \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

b) Si $p = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i) &= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
\mathrm{P}(Y = j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
\mathrm{P}(X = i \text{ et } Y = j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2} \text{ les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$