Corrigé par Pierre Veuillez

Edhec, 1999, option économique.

EXERCICE 1 :

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. On a $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Et pour tout (x,y,z,t) : $(A-\alpha I)X = 0$

   $\iff \begin{cases} (1-\alpha)x - 2y + t = 0 \\ (-1-\alpha)y + z = 0 \\ -\alpha z + t = 0 \\ -z - \alpha t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\alpha)x - 2y + t = 0 \\ (-1-\alpha)y + z = 0 \\ t = \alpha z \\ -(1+\alpha^2)z = 0 \end{cases} \iff (1) \begin{cases} (1-\alpha)x - 2y = 0 \\ (-1-\alpha)y = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ car $1+\alpha^2 \neq 0$

   - Si $\alpha = -1$ alors $(1) \iff \begin{cases} x = y \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

     donc -1 est valeur propre associé au sous espace propre $\text{Vect}((1,1,0,0))$

   - Si $\alpha \neq -1$ alors $(1) \iff \begin{cases} (1-\alpha)x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ et

     – si $\alpha \neq 1$ alors $(1) \iff x = y = z = t = 0$ et α n'est pas valeur propre

     – si $\alpha = 1$ alors $(1) \iff y = z = t = 0$

       donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $\text{Vect}(1,0,0,0)$

   Conclusion : $\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont les seules valeurs propres de } A(0)}$

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. On réduit la matrice $(A(a) - \lambda I)$: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & 0 & 1 \\ a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 - \frac{1-\lambda}{a} L_2 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ L_3 - (a+\lambda) L_4 \to L_4 \\ L_4 \to L_3 \end{matrix}$

   $\iff \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & a-2+\frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{a} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & -a-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda(a+\lambda) \end{pmatrix}$ triangulaire qui est donc non inversible si et seulement si

   $0 = a - 2 + \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{a} = \frac{a^2-2a+1-\lambda^2}{a}$ soit $\lambda^2 = (a-1)^2$

ou pour $0 = 1 + \lambda(a + \lambda)$ soit $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } A(a) \text{ sont les réels } \lambda \text{ solutions de l'une des équations : } \lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.}$

3. a) $A(a)$ n'est pas inversible si et seulement si .0 est valeur propre.
   Donc si $a = 1$ (la seconde équation n'a pas de sllutio si $\lambda = 0$)

   b) Si $a = 1$, les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et les solutions de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 4 < 0$
   Donc la seule valeur propre de $A(1)$ est 0.
   Si $A(1)$ était diagonalisable, on aurait $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec D diagonale nulle ! donc $A(1) = 0$ ce qui n'est pas le cas.
   Conclusion : $\boxed{A(1) \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4. On suppose dans cette question que $a > 2$.

   a) Les valeurs propres sont alors$a - 1$ et $1 - a$
   Sont-elles racine de la seconde équation ?
   $(a-1)^2 + a(a-1) + 1 = 2a^2 - 3a + 2 : \Delta = 9 - 16 < 0$ donc non nul pour tout $a \in \mathbb{R}$
   $(1-a)^2 + a(1-a) + 1 = -a + 2 < 0$
   Donc elles ne sont pas racines.
   D'autre part il y a $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a-4}}{2}$ car $\Delta = a - 4 > 0$
   Conclusion : $\boxed{A(a) \text{ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.}}$

   b) Comme $A(a)$ est d'ordre 4, $A(a)$ est donc diagonalisable.

EXERCICE 2

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)\, e^y$.

N.B. les théorèmes sur les extrema ne s'appliqent que sur des ouverts. Il faut donc préciser que c'est sur un ouvert qu'on les applique.

Partie 1 : étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$

1. a) f_a est de calsse C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   $\dfrac{\partial f_a(x,y)}{\partial x} = e^y(y + 2ax)$ et $\dfrac{\partial f_a(x,y)}{\partial y} = e^y\left(1 + y + xy + ax^2\right) + (1+x)\,e^y = \left(2 + x + y + xy + ax^2\right) e^y$

   b) Sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si f_a a un extremum, alors ses deux dérivéesd partielles prmières s'annulent :
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f_a(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f_a(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^y(y + 2ax) = 0 \\ (2 + x + y + xy + ax^2)\, e^y = 0 \end{cases} \text{ et comme } e^y \neq 0$$
   $$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2ax \\ 2 + x - 2ax - 2ax^2 + ax^2 = 0 \end{cases}$$

$(L_2) \iff 2+(1-2a)\,x-ax^2=0$ est une équation du second degré car $a\neq 0$ qui a pour dicriminant :
$\Delta=(1-2a)^2+8a=1+4a+4a^2=(1+2a)^2>0$ car $a\neq -1/2$
Donc (L_2) a pour solutions $x_1=\dfrac{2a-1+1+2a}{-2a}=-2=$ et $x_2=\dfrac{2a-1-1-2a}{-2a}=\dfrac{1}{a}$
Donc les deux seuls points critiques de f_a sont $(-2,4a)$ et $\left(\dfrac{1}{a},-2\right)$

2. f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $r=\dfrac{\partial^2 f_a(x,y)}{\partial x^2}=2ae^y$,
$s=\dfrac{\partial^2 f_a(x,y)}{\partial y\partial x}=e^y(y+2ax)+e^y=e^y(1+y+2ax)$
et $\frac{\partial^2 f_a(x,y)}{\partial y^2}=(2+x+y+xy+ax^2)\,e^y+e^y(1+x)=(3+2x+y+xy+ax^2)\,e^y$

3. a) On étudie séparément les deux points critiques :
   - En $(-2,4a)$ on a : $r=2ae^{4a}$: $s=e^{4a}(1+4a-4a)=e^{4a}$: $t=(3-4+4a-8a+4a)\,e^{4a}=-e^{4a}$
     Donc $rt-s^2=-2ae^{4a}e^{4a}-e^{8a}=-(2a+1)\,e^{8a}$
     Donc f_a a un extremum local en ce point si et seulement si $2a+1<0$ (le cas indéterminé $rt-s^2=0$ n'est pas possible car $a\neq -1/2$)
   - En $\left(\frac{1}{a},-2\right)$ on a : $r=2ae^{-2}$: $s=e^{-2}(1-2+2)=e^{-2}$: $t=\left(3+\frac{2}{a}-2-\frac{2}{a}+\frac{a}{a^2}\right)e^{-2}=\left(1+\frac{1}{a}\right)e^{-2}$
     Donc $rt-s^2=2a\left(1+\frac{1}{a}\right)e^{-2}e^{-2}-e^{-4}=(2a+1)\,e^{-4}$
     Donc f_a a un extremum local en ce point si et seulement si $2a+1>0$ (le cas indéterminé $rt-s^2=0$ n'est pas possible car $a\neq -1/2$)

   b) Dans le cas d'un extremum, on détermine s'il est maximum ou minimum par le signe de r donc de a :
   - si $a<\frac{-1}{2}$ alors $a<0$ et f_a a un extremum local uniquement en $(-2,4a)$ qui est un maximum $(r<0)$
     Ce maximum vaut : $f_a(-2,4a)=(1+4a-8a+4a)\,e^{4a}=e^{4a}$.
   - si $\frac{-1}{2}<a<0$ alors f_a a un extrremum uniquement en $\left(\frac{1}{a},-2\right)$ qui est un maximum $(r<0)$
     Ce maximum vaut : $f_a\left(\frac{1}{a},-2\right)=\left(1-2-\frac{2}{a}+\frac{1}{a}\right)e^{-2}=-\left(1+\frac{1}{a}\right)e^{-2}$
   - enfin, si $a>0>\frac{-1}{2}$ alors f_a a un extrremum uniquement en $\left(\frac{1}{a},-2\right)$ qui est un minimum $(r>0)$
     Ce maximum vaut : $f_a\left(\frac{1}{a},-2\right)=-\left(1+\frac{1}{a}\right)e^{-2}$

Partie 2 : étude d'un fonction définie à l'aide de f_a

1. a) Pour tout réel x et pour tout réel t inférieur à x, $\int_t^x e^y dy=[e^y]_{y=t}^x=e^x-e^t$
   Et quand $t\to-\infty$: $\int_t^x e^y dy\to e^x$.
   Donc $I=\displaystyle\int_{-\infty}^x e^y dy$ qui est impropre en $-\infty$converge et vaut e^x

   b) Pour tout réel x et t, on intégre par parties $\int_t^x ye^y dy$ avec $u(y)=y$, $v'(y)=e^y$, $u'(y)=1$ et $v(y)=e^y$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_t^x ye^y dy &= [ye^y]_{y=t}^x-\int_t^x e^y dy\\ &= xe^x-te^t-[e^y]_{y=t}^x\\ &= xe^x-te^t-e^x+e^t\end{aligned}$$

Avec le changement de variable $s = -t \to +\infty$ quand $t \to -\infty$ on a $te^t = -se^{-s} = -s/e^s \to 0$ car $s \ll e^s$ quand $s \to +\infty$.
Donc $\int_t^x ye^y dy \to xe^x - e^x$ quand $t \to -\infty$.
Donc $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} ye^y dy$ converge et vaut $(x-1)\, e^x$

2. a) Soit $F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_a(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{x} (1 + y + xy + ax^2)\, e^y dy$ est impropre en $-\infty$.
Comme $(1 + y + xy + ax^2) = (1 + ax^2) + y(1 + x)$ et que
- $\int_{-\infty}^{x} e^y dy$ converge alors $\int_{-\infty}^{x} (1 + ax^2)\, e^y dy$ converge et vaut $(1 + ax^2)\, e^x$
- $\int_{-\infty}^{x} ye^y dy$ converge donc $\int_{-\infty}^{x} y(1+x)\, e^y dy$ converge et vaut $(1+x)(x-1)\, e^x = (x^2-1)\, e^x$

alors $\int_{-\infty}^{x} (1 + y + xy + ax^2)\, e^y dy$ converge et vaut $(1 + ax^2)\, e^x + (x^2 - 1)\, e^x = (a+1)\, x^2 e^x$
Donc F_a est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) On a vu que $F_a(x) = (a+1)\, x^2 e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_a'(x) = (a+1)(2x + x^2)\, e^x$
d'où les variations de F_a :

x	$-\infty$	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$2x + x^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	$2°$degré
$a > -1 : F_a(x)$	0	$\nearrow$	$4(a+1)\, e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$a = 1 : F_a(x)$	0	$\to$	0	$\to$	0	$\to$	0
$a < -1 : F_a(x)$	0	$\searrow$	$4(a+1)\, e^{-2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

En $-\infty$, on fait le changement de variabale $t = -x \to +\infty$ et $x^2 e^x = t^2 e^{-t} = t^2/e^t \to 0$ quand $x \to -\infty$

EXERCICE 3

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$
(c'est-à-dire que : $\forall k \in [|1,n|]\, , P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \dfrac{1}{n}$).

1. a) i. **Rappel :** si X et Y suivent des lois binômiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$de même paramètre de succès p et sont indépendantes alors la somme $X + Y$ suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n+m,p)$
Si X et Y suivent de s lois de poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ et $\mathcal{P}(\beta)$ alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta)$
Attention : On connait la probabilité d'événements du type $(X = i)$ ou $(Y = i)$ pour i fixé.
$(X + Y = k)$ peut s'écrire $(Y = k - X)$ mais $k - X$ n'est pas un entier mais une variable aléatoire.
Pour $k \in [|2, n+1|]$
On peut utiliser deux méthodes :
- décomposer $(X + Y = k)$ en fonction des valeurs de X et de Y :
$(X + Y = k) = \displaystyle\bigcup_{i\ldots} [X = i \cap Y = k - i]$
les valeurs de i étant celles pour lesquelles $X = i$ et $Y = k - i$ sont possibles.
- calculer la probabilité de $(Y = k - X)$ en conditionnant par la valeur de X pour la fixer : en passant par la formule des probabilités totales.

Par la première méthode :
On veut que $1 \leq i \leq n$ (valeurs de X) et que $1 \leq k-i \leq n$ (valeurs de Y) que l'on résout par rapport à i, puisque c'est sur i que l'on fait la réunion.
$1 \leq k-i \leq n \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq k-1$
Donc pour avoir les deux contions, il faut

- que i soit supérieur au plus grand de 1 et de $k-n$. Il faut donc déterminer qui est le plus grand. Celà dépend de k. Et commme $k \leq n+1$ alors $k-n \leq 1$. Le plus grand des deux est donc 1 et les deux conditions équivalent à $1 \leq i$
- que i soit inférieur au plus petit de n et de $k-1$ et commme $k \leq n+1$ on a $k-1 \leq n$ et le plus petit des deux et $k-1$. Les deux conditions équivalent donc à $i \leq k-1$.

Finalement $(X+Y=k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k-1} (X=i \cap Y=k-i)$ et les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p(X=i \cap Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} p(X=i)\, p(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2} \end{aligned}$$

les probabilité sont $1/n$ car dans la somme on a $1 \leq i \leq k-1$ donc $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k-i \leq n$ (conditions que l'on a résolu justement)
Par la seconde méthode :
$(X=i)_{i \in [[1,n]]}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\begin{aligned} p(Y=k-X) &= \sum_{i=1}^{n} p(Y=k-X/X=i)\, p(X=i) = \sum_{i=1}^{n} p(Y=k-i/X=i)\, p(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(Y=k-i)\, p(X=i) \quad \text{car } Y \text{ et } X \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Attention : pour pouvoir utiliser la loi, il faut savoir, pour X, que $i \in [[1,n]]$, ce qui est le cas, mais également que $k-i \in [[1,n]]$ ce qui n'est pas évident !
$1 \leq k-i \leq n \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq k-1$. Condition qu'il faut donc vérifier.
Comme $k \leq n+1$ alors on a $k-n \leq 1$ et donc et pour tous les indices de la somme la relation est vérifiée..
Mais comme $k \leq n+1$ alors $k-1 \leq n$ et seuls les termes de la somme jusqu'à $k-1$ rentreront dans la loi uniforme...Il faut donc à présent découper la somme en 2 :

$$\begin{aligned} p(Y=k-X) &= \sum_{i=1}^{k-1} p(Y=k-i)\, p(X=i) + \sum_{i=k}^{n} p(Y=k-i)\, p(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \sum_{i=k}^{n} 0 = \frac{k-1}{n^2} \end{aligned}$$

ii. Pour $k \in [|n+2, 2n|]$On refait ici la même décomposition.
Mais cette fois, comme $k \geq n+2$ alors $k-n \geq 2$ et la double condition $1 \leq i$ et $k-n \leq i$ équivaut à $k-n \leq i$
et de même $k \geq n+2$ donc $k-1 \geq n+1$ donc la double condition $i \leq n$ et $i \leq k-1$ équivaut à $i \leq n$

Finalement $(X+Y=k)=\bigcup_{i=k-n}^{n}(X=i\cap Y=k-i)$ et les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i=k-n}^{n} p(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\frac{n-(k-n)+1}{n^2} \\ &= \frac{2n-k+1}{n^2} \end{aligned}$$

b) $(Z=k)_{k\in[[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(X+Y=Z) &= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=Z/Z=k)\,p(Z=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=k)\,p(Z=k) \end{aligned}$$

Ici, seule la valeur $k=1$ joue un rôle particulier, où $P(X+Y=1)=0$ car la valeur minimale de la somme est 2.

$$\begin{aligned} P(X+Y=Z) &= \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k)\,p(Z=k)+0 \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n^2}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k-1) \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{h=1}^{n-1}h=\frac{(n-1)\,n}{n^3 2}=\frac{n-1}{2n^2} \end{aligned}$$

c) i. Ici, on revient à la définition : valeurs possibles et probabilités.
$1\le Z\le n \iff 1\le n+1-Z\le n$ donc $T(\Omega)=[[1,n]]$ et pour tout $k\in[[1,n]]$ on a

$$\begin{aligned} p(T=k) &= p(n+1-Z=k)=p(Z=n+1-k) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car $n+1-k\in[[1,n]]$
Finalement $T=n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.

ii. Comme Z est indépendante de X et de Y alors $n+1-Z$ l'est aussi. (les événements liés à T ne sont liés qu'à Z)

iii. $P(X+Y+Z=n+1)$ s'écrit $P(X+Y=n+1-Z)=P(X+Y=T)$ et on est ramené aux conditions initiales de l'exercice avec trois variables X, Y et T indépendantes. Donc $P(X+Y+Z=n+1)=\dfrac{n-1}{2n^2}$

PROBLEME

Partie 1

1. a) Comme $t\to 1/t$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ on a pour tout $0<p\le t\le p+1$:
$\dfrac{1}{p}\ge\dfrac{1}{t}\ge\dfrac{1}{p+1}$

Comme $p \leq p+1$ alors $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt = \frac{1}{p+1}$.

($p+1$ est une constante par rapport à t)

b) Que faire de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$ par réindexation.

On a d'après la question précédente $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$

Or cette deuxième somme vaut : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$

D'où

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$$

2. φ_1 est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

   En 0 : $x(1+\ln(x)) = x + x\ln(x)$ et comme $x\ln(x) = \ln(x)/x^{-1}$ et que $\ln(x) = o(x^{-1})$ alors $\varphi_1(x) \to 0 = \varphi_1(0)$ quand $x \to 0$.

   Donc φ_1 est continue sur $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

3. a) Par récurrence : φ_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

   Soit $n \geq 1$ tel que φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0, x]$ pour tout $x \geq 0$ et $\displaystyle\int_0^x \varphi_n(t)\,dt$ est définie pour tout $x \geq 0$

   De plus φ_{n+1} est alors la primitive de φ_n qui s'annule en 0. Elle est dérivable et donc continue.

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \varphi_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ pour tout entier } n \text{ et et } \varphi_n(0) = 0}$

   b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

   on a $\varphi_1(x) = x(1+\ln(x))$ donc avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$ on a bien $\varphi_1(x) = x^1(a_1 + b_1 \ln x)$

   Soit $n \geq 1$ tel que .$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$.

   Si on cherche φ_{n+1} par intégration par parties, il y a un porblème de dérivabilité en 0.

   On vérifie donc simplement que $F : x \to x^{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1}\ln x)$ si $x > 0$ et $F(0) = 0$ avec $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{n+1}$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{b_n}{(n+1)^2}$ est buien une primitive sur $\mathbb{R}^+$

   Pour $x > 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (n+1)x^n(a_{n+1} + b_{n+1}\ln x) + x^{n+1}b_n/x \\ &= x^n[(n+1)a_{n+1} + b_{n+1} + (n+1)b_{n+1}\ln(x)] \\ &= \varphi_n(x) \end{aligned}$$

   Reste le problème en 0 th de prolongement C^1

   Si $x > 0$

   - $F(x) = x^{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1}\ln x) \to 0 = F(0)$ donc F est continue en 0
   - $F'(x) = \varphi_n(x) \to \varphi_n(0) = 0$ car φ_n est continue.

   Donc F est C^1 en 0 et $F'(0) = 0 = \varphi_n(0)$

   Donc F est la primitive de φ_n qui s'annule en 0.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc la primitive de } \varphi_n \text{ qui s'annule en 0 est donc} \varphi_{n+1} = F \\ \text{avec } a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} - \dfrac{b_n}{(n+1)^2} \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{b_n}{n+1}\end{array}}$

Finalement, pour tout entier $n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$.

4. Pour calculer la valeur suivante a_{n+1} on a besoin des valeurs précédentes a_n et b_n.
   par contre pour b_{n+1} on n'a besoin que de b_n et pas de a_n.
   Dans le programme, on mettra donc d'abord à jour a_{n+1} et ensuite b_{n+1}
   On calcule les termes suivants d'indice 2 à n (`i` est l'indice précédent)
   (d'où le : `for i:=1 to n-1`)

```
Program suite;
var a,b:real;n,i:integer;
begin
    writeln('n?); readln(n);
    a:=1;b:=1;
    writeln(a,b)
    for i:=1 to n-1 do
    begin
        a:=a/(i+1)-b/sqr(i+1);
        b:=b/i+1;
        writeln(a,b)
    end;
end.
```

5. On reconnaît l'inverse de la suite factorielle : pour tout entier $n \geq 1$ on a $b_n = 1/n!$
6. Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n!\, a_n$.

   a) On prouve cela par récurrence :

   - Pour $n = 1$ on a $c_1 = 1!a_1 = 1$ et $u_1 = 1$ donc $c_1 = 2 - u_1$
   - Soit $n \geq 0$ tel que $c_n = 2 - u_n$ alors

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= (n+1)!a_{n+1} = (n+1)!\left[\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}\right] \\ &= n!a_n - \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)^2\,n!} \\ &= c_n - \frac{1}{n+1} \\ &= 2 - u_n - \frac{1}{n+1} \\ &= 2 - u_{n+1} \end{aligned}$$

car $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1}$

- Donc pour tout entier $n \geq 1$ on a bien $c_n = 2 - u_n$.

b) Comme $u_n \leq 1 + \ln(n)$ alors $c_n = 2 - u_n \geq 1 - \ln(n)$ donc $c_n \geq -1 - \ln(n)$
Pour majorer la valeur absolue, reste à majorer : est-ce que $c_n \leq 1 + \ln(n)$?
pour $n = 2$ on a $c_2 = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1 + \ln(2)$
Comme u est une suite croissante alors, c est décroissante et pour tout entier $n \geq 2$:

$$-1 - \ln(n) \leq c_n \leq c_2 \leq 1 + \ln(2) \leq 1 + \ln(n)$$

et finalement pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) On a donc pour tout entier $n \geq 2$: $|n!a_n| \leqslant 1 + \ln(n)$ et donc $|a_n| \leqslant (1 + \ln(n))/n!$
Et comme $\ln(n) = o(n)$ et que $n = o(n!)$ on a alors par encadrement $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

d) On a donc $|a_n| = o(1/(n-1)!)$ et pour N suffisamment grand $|a_n| \leq 1/(n-1)!$
La série des $1/n!$ étant convergent alors par comparaison de séries à termes positifs, la série des $|a_n|$ est convergente et la série de terme général a_n est absolument convergente.

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x\ln(x)$ et $e_4(x) = x^2\ln(x)$.
On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :
(*) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0$.

   a) Puisque la relation précédente est valable pour tout $x > 0$, elle est vraie en particulier pour $x = 1$ donc $a + b = 0$.

   b) En divisant l'expression (*) par $x^2\ln(x) \neq 0$ puisque $x > 1$ on obtient $\forall x > 1, \dfrac{a}{x\ln(x)} + \dfrac{b}{\ln(x)} + \dfrac{c}{x} + d = 0$.
   Et en prenant la limite de cette quantité en $+\infty$ on trouve $d = 0$.

   c) Puisque $d = 0$ en divisant (*) par $x^2 \neq 0$ on trouve $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Et la limite queand $x \to +\infty$, comme $\ln(x) = o(x)$ est $b = 0$.

   d) D'où comme $a + b = 0$ on a alors $a = 0$. On sait déjà que $d = 0$, en prebnant (*) pour $x = e$ on en déduit que $c \cdot e = 0$ donc $c = 0$
   Finalement que $a = b = c = d = 0$.

2. a) Pour tout réels a, b, c et d , si $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0$ alors la fonctin est nulle, donc pour tout réel $x > 0$ on a (*) et $a = b = c = d = 0$
   Donc (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

   b) Comme elle est génératrice de E, c'en est donc une base.

3. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = xf'(x)$.

a) Montrer que u est une application linéaire.
Il faut montrer que

- u est définie sur E (à valeurs dans $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$) les fonctions $e_1, \ldots e_4$ étant dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, leurs combinaisons linéaires le sont également.
- pour toutes fonctions f_1 et f_2 de E on a pour tout réle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} u\left(\alpha f_1+\beta f_2\right)(x) &= x\left(\alpha f_1+\beta f_2\right)'(x)=x\left(\alpha f_1'(x)+\beta f_2'(x)\right) \\ &= \alpha x f_1'(x)+\beta x f_2'(x) \\ &= \alpha u\left(f_1\right)(x)+\beta u\left(f_2\right)(x) \end{aligned}$$

donc $u\left(\alpha f_1+\beta f_2\right)=\alpha u\left(f_1\right)+\beta u\left(f_2\right)$
et u est une papplication linéaire de E

b) Pour tout $x>0$ on a :

- $u\left(e_1\right)(x)=x$ donc $u\left(e_1\right)=e_1$
- $u\left(e_2\right)(x)=x 2x=2x^2$ donc $u\left(e_2\right)=2e_2$
- $u\left(e_3\right)(x)=x(\ln(x)+1)=x\ln(x)+x$ donc $u\left(e_3\right)=e_1+e_3$
- $u\left(e_4\right)(x)=x(2x\ln(x)+x)=2x^2\ln(x)+x^2$ donc $u\left(e_4\right)=2e_4+e_2$

c) Donc pour une combinaison linéaire de ces 4 fonction, l'image par u qui est la combianiasons de leurs images, sera encore une combinaison de ces 4 fonctions :

$$\begin{aligned} u\left(a e_1+b e_2+c e_3+d e_4\right) &= a u\left(e_1\right)+b u\left(e_2\right)+c u\left(e_3\right)+d u\left(e_4\right) \\ &= (a+c) e_1+(2b+d) e_2+c e_3+2d e_4 \\ &\in E \end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire de E dans E donc un endomorphisme de E.

4. a) On a les coordonnées des images donc $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) La matrice A étant triangulaire à termes non nuls sur la diagonale, elle est inversible et u est donc bijective don un automorphisme de E.

(EDHEC 1999)